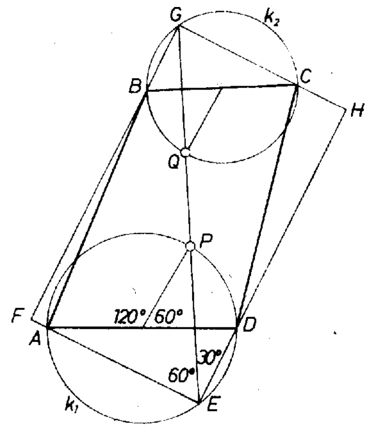
I. megoldás. A kívánt téglalap EFG részháromszöge derékszögű, és az $EG = 2\cdot EF$ követelmény szerint hasonló a tengelye mentén kettévágott szabályos háromszög feléhez. Ezért az EG átló a végpontjainál levő derékszögeket 30°-os és 60°-os részekre, vagyis 1:2 arányban osztja.

Az E csúcs csak az AD szakasz k_1 Thalész-körén lehet – ha egyáltalán van megoldása a feladatnak –, pontosabban az AD-nek a B-t és C-t nem tartalmazó partján levő félkörön, hasonlóan G a BC átmérőjű k_2 körnek csak azon a félkörén lehet, amelyet BC elválaszt A-tól (1. ábra).



1. ábra

Jelöljük az EG egyenesnek k_1-en levő második (azaz E-től különböző) metszéspontját P-vel, a k_2-n levőt Q-val. Ekkor a DP és a PA, valamint a BQ és a QC ívek aránya is 1:2, mert egy körben két ív aránya egyenlő a rajtuk álló középponti szögek arányával, és így a kerületi szögek arányával is. Eszerint P harmadolja azt a DA félkört, amelyik AD-nek a B-t tartalmazó (röviden: belső) partján van, és Q harmadolja a belső BC félkört. Eszerint P és Q kimetszhetők a D körüli $DA/2$, illetve a B körüli $BC/2$ sugarú körrel, ezután a PQ egyenes k_1-ből, k_2-ből kimetszi E-t, G-t, és a keresett téglalap oldalegyeneseire csak az EA, ED, GB, GC egyenesek jönnek szóba.

Az így kapott $EFGH$ négyszög oldalegyenesei az előírás szerint rendre átmennek az adott A, B, C, D pontokon, az E-ben és a G-ben összefutó $2-2$ egyenes Thalész tétele alapján merőleges egymásra, végül $EH \,||\, FG$, mert az ED, GB félegyenesek egyenlő (30°-os) szöggel hajlanak EG-hez ennek két partján, tehát váltószögek, és ugyanígy $EF \,||\, GH$. Így a kapott $EFGH$ négyszög mindenesetre a kívánt arányt mutató téglalap. Azt viszont csak a szerkesztés végrehajtása után lehet eldönteni, megfelel-e annak a szigorúbb követelménynek, hogy az A, B, C, D pont a téglalapnak rendre a megfelelő oldal*szakaszán* legyen rajta.

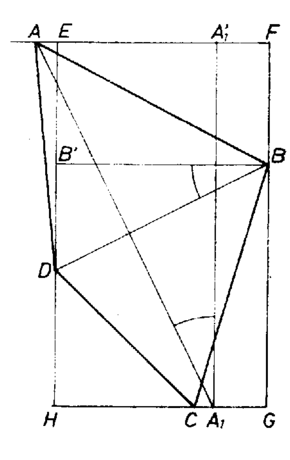
A két kör és rajta P, illetve Q kijelölése egyértelműen lehetséges, így a szerkesztés végrehajthatósága csak azon múlik, hogy P és Q különböző pontok-e, alkalmasak-e egy egyenes meghatározására. Ha Q egybeesik P-vel, akkor az EG egyenes tetszőlegesen választható, úgy, hogy egyik-egyik félegyenese az APD, illetve a BPC szögtartományban haladjon.

Megjegyzések. 1. Ajánljuk az olvasónak, vázoljanak a kívánt téglalaphoz olyan $ABCD$ kiindulási négyszögeket, amelyeknek 1 csúcsa egy meghosszabbításra esik, majd 2, 3, 4 csúccsal ez a helyzet. Ilyen „visszafelé való spekulációval" (helyzetek elemzésével) is szoktathatnák magukat a feladatok végén szükséges diszkusszióra. Keressenek olyan B, C-t is a megválasztott A, D pontpárhoz, amelyre Q egybeesik P-vel!

2. A dolgozatok nem tartalmaztak diszkussziót.

3. A megoldás a következő, sokszor felvetett feladatnak a mintájára készült: olyan négyzet szerkesztendő, amelynek oldalai (oldalegyenesei) előírt sorrendben átmennek 4 előre megadott ponton.

II. megoldás. Húzzunk A-n át BD-re merőleges egyenest és jelöljük a keresett GH egyenesen levő pontját A_1-gyel, továbbá, A_1-nek EF-en, B-nek EH-n levő vetületét rendre A_1'-vel, B'-vel.



2. ábra

Így $A_1A_1' \perp BB'$, ezért az AA_1A_1' és a DBB' derékszögű háromszögben az A_1-nél, D-nél levő szög egyenlő, e háromszögek hasonlók. Megfelelő oldalpárjaik aránya egyenlő:

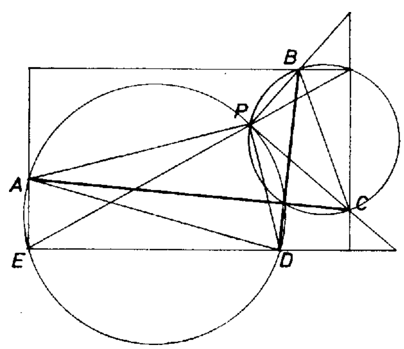
$$AA_1 : DB = A_1A_1' : BB',$$
$$AA_1 = \frac{A_1A_1'}{BB'} \cdot DB = \frac{HE}{FE} \cdot DB = \frac{b}{m} \cdot DB,$$

ahol b egy tetszőleges egyenlő oldalú háromszög alapjának a fele, m a magassága. (Felhasználtuk az I. megoldás megállapítását a keresett téglalap oldalairól.) Eszerint AA_1 hosszát megadja egy $2 \cdot BD$ alapú szabályos háromszög magassága, ezt felmérve A-ból a BD-re merőlegesen (BD-n túlra vagy közelítve hozzá), és a téglalap C-n átmenő oldala csak a CA_1 egyenes lehet. A további oldalegyenesek ebből kiadódnak.

A szerkesztés helyességének bizonyításához csak a felhasznált háromszögre kell hivatkoznunk, másrészt ellenőriznünk kell, hogy az A, B, C, D csúcsok a téglalap oldalszakaszain legyenek. (A 2. ábrán az A kissé kiesik, ebben az esetben tehát nincs megoldása a feladatunknak.)

A szerkesztés végrehajtása azon múlik, hogy A_1-ként a C-től különböző pontot kapunk-e vagy nem. Ha A_1 azonosnak adódik C-vel (a 2. ábrán olyan helyzetet mutatunk be, amelyen közel áll hozzá), akkor a rajta átmenő GH egyenes szabadon választható bizonyos korlátok között.

Megjegyzések. 1. Itt és az I. megoldásban lényegesen különbözőnek látszó feltételt kapunk a végrehajtás egyértelműségére. Megmutatjuk, hogy az előbbi feltétel azonos az utóbbival, vagyis ha az ottani teljesül – ti. Q egybeesik P-vel –, akkor A_1 is azonos C-vel (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az ADP és CBQ (azaz CBP) háromszögek egyező körüljárásúan hasonlók, így van olyan P centrumú forgatva nyújtás, mely az első háromszöget a másodikba viszi át, ennek szöge, az irányt is hozzáértve, $APC\sphericalangle = DPB\sphericalangle$. Ez pedig azt jelenti, hogy a P centrumú, $PC/PB = \sqrt{3}$ arányú és (alkalmas irányban) $90°$-os forgatva nyújtás BD-t CA-ba viszi át, tehát $AC \perp DB$ és $AC = \sqrt{3} \cdot BD$. (Az olvasó gondolja át, hogy a második feltétel teljesüléséből is következik az elsőnek a teljesülése.)

2. Az AA_1 szakasz szerkesztése egyszerűbb, ha BD-re mindkét partján szabályos háromszöget szerkesztünk, az új csúcsok távolsága AA_1.