Első lépésként határozzuk meg azokat az $A,\ B,\ C,\ D$ számjegyeket, amikre a sorozat első három tagja négyzetszám.

Tudjuk, hogy egy szám hárommal osztva ugyanannyi maradékot ad, mint a számjegyeinek az összege. Ezért ha $C+D$ nem osztható hárommal, akkor

$$AB,\qquad ACDB,\qquad \text{valamint}\qquad ACCDDB$$

számokat hárommal osztva három különböző maradékot kapunk. Másrészt tudjuk, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, így sorozatunk első három tagja nem adhat három különböző maradékot. Következésképp $(C+D)$-nek oszthatónak kell lennie hárommal.

Az iskolai függvénytáblázat négy értékes jegyet ad meg, így a századot és ezredet nem tartalmazó számok négyzetei pontos értékükkel szerepelnek. Ezek között kell olyan AC,DB alakú számokat keresnünk, amelyekre AB négyzetszám és $C+D$ osztható hárommal. Négy ilyen számot találunk:

$$11{,}56=3{,}4^2;\qquad 19{,}36=4{,}4^2;\qquad 44{,}89=6{,}7^2;\qquad 67{,}24=8{,}2^2.$$

Az első és harmadik esetben $ACCDDB$ négyzetszám: $111\,556=334^2$ illetve $444\,889=667^2$, míg a másik két esetben

$$199\,336=8\cdot 24\,917,\qquad \text{illetve}\qquad 677\,224=8\cdot 84\,653$$

nem négyzetszám, hiszen 8-cal osztható négyzetszám 16-tal is osztható.

Ezek szerint $A,\ B,\ C,\ D$ lehetséges értékei:

$$\begin{aligned}&A=1,\quad B=6,\quad C=1,\quad D=5,\quad \text{illetve}\\&A=4,\quad B=9,\quad C=4,\quad D=8.\end{aligned}$$

A gyakorlat állításának igazolásához tehát azt kell belátnunk, hogy az

$$1\ \underbrace{1\dots1}_{n-1}\ \underbrace{5\dots5}_{n-1}\ 6,\qquad \text{illetve}\qquad 4\ \underbrace{4\dots4}_{n-1}\ \underbrace{8\dots8}_{n-1}\ 9$$

számok minden n-re négyzetszámok. Ez viszont az

$$\begin{aligned}1\ \overbrace{1\dots1}^{n-1}\ \overbrace{5\dots5}^{n-1}\ 6&=\overbrace{11\dots1\,1}^{2n}+4\cdot\overbrace{1\dots1\,1}^{n}+1=\\&=\frac{10^{2n}-1}{9}+4\cdot\frac{10^n-1}{9}+1=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2,\\4\ \overbrace{4\dots4}^{n-1}\ \overbrace{8\dots8}^{n-1}\ 9&=4\cdot\overbrace{1\,1\dots1\,1}^{2n}+4\cdot\overbrace{1\dots1\,1}^{n}+1=\\&=4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}+4\cdot\frac{10^n-1}{9}+1=\left(\frac{2\cdot10^n+1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

összefüggésekből látszik. A jobb oldali zárójelben levő számok egészek, hiszen a számlálóban álló szám számjegyeinek összege osztható 3-mal, így maga a szám is.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Bodó Zalán (Budapest, I. István Gimn., II. o. t.)