

Minden prímszám a 3 kivételével vagy $x + 1$ vagy $x + 2$ alakú, ahol x hárommal osztható szám. Így három esetet különböztetünk meg:

a) $p = 3$. Ekkor $p^3 + p^2 + 11p + 2 = 71$, prímszám.

b) $p = x + 1$, és x osztható 3-mal. Ekkor

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = (x + 1)^3 + (x + 1)^2 + 11(x + 1) + 2 = x^3 + 4x^2 + 16x + 15.$$

Mivel x osztható 3-mal, ezért $x^3 + 4x^2 + 16x$ is, 15 szintén. Így a kérdéses kifejezés is osztható 3-mal. Másrészt $x > 0$ miatt értéke legalább 15, így nem lehet éppen 3, és egy 3-nál nagyobb, 3-mal osztható szám pedig biztosan nem prím.

c) $p = x + 2$ és x osztható 3-mal. Ekkor

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = (x + 2)^3 + (x + 2)^2 + 11(x + 2) + 2 = x^3 + 7x^2 + 27x + 36.$$

Ez a kifejezés is osztható 3-mal, és értéke legalább 36, így biztosan nem prímszám.

Így a feladat egyetlen megoldása: $p = 3$.

Elek Gábor (Budapest, Váci utcai Ált. Isk., 6. o. t.)