I. megoldás. 1. A keresett háromszög AB, AC oldalegyenese szimmetrikus az adott f egyenesre, tehát P-nek f-re vonatkozó P^* tükörképe rajta van az AC egyenesen. Ha P^* nem azonos Q-val, a P^*, Q pontok meghatározzák az AC egyenest, ennek f-fel alkotott metszéspontja a háromszög A csúcsa. A másik két csúcs megszerkesztése érdekében meghatározzuk a három szögfelező O metszéspontját (a háromszögbe írt kör középpontját).

Az O pont a PQ egyenes A-val ellentétes oldalán van. Az AOP szög az ACO háromszög külső szöge, tehát

$$AOP\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

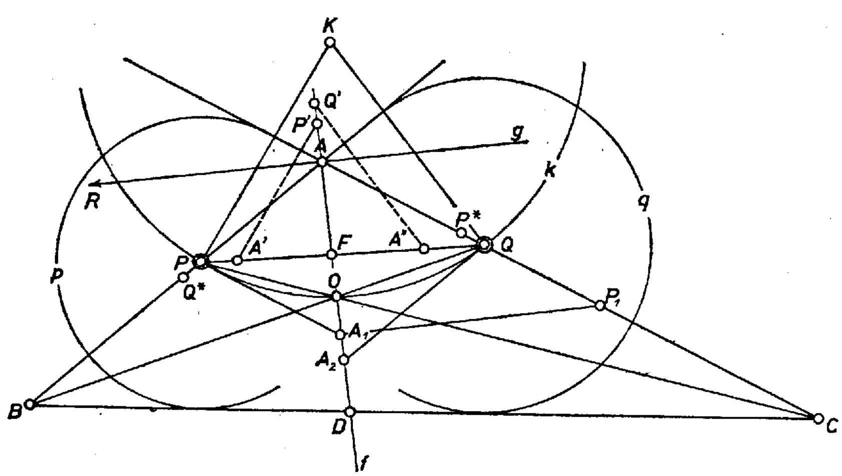
$$AOQ\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

ahol α, β, γ a keresett háromszög szögei. Ezek alapján a keresett O pontból a PQ szakasz

$$POQ\sphericalangle = AOP\sphericalangle + AOQ\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

szög alatt látszik. Mivel A helyzete és α értéke már ismert, ez a szög is megszerkeszthető, a megfelelő látókörív kimetszi f-ből O-t, és a PO, QO egyenesek pedig az AQ, AP egyenesekből rendre kimetszik a C, B csúcsokat.

2. A szerkesztés első lépése, A meghatározása végrehajtható, ha P^* nem azonos Q-val, és $P*Q$ nem párhuzamos f-fel. Az $\alpha = PAQ\sphericalangle$ nem lehet 180°, tehát akkor sem folytathatjuk a szerkesztést, ha $P^*Q \perp f$-re. Ha ez nincs így, akkor α alapján mindig megszerkeszthetjük az O pontot. A konkrét szerkesztés történhet például a következő lépésekben. Jelöljük PQ és f metszéspontját F-fel, tegyük be az APF háromszöget fordítva az AFP szögletbe, kapjuk az $A'P'F$ háromszöget, hasonlóan AFQ fordítottja legyen $A''FQ'$. Húzzunk párhuzamost P-n át $A'P'$-vel, Q-n át $A''Q'$-vel, ezek metszéspontja legyen K. A K körüli, P-n átmenő k kör PQ-nak A-val ellentétes oldalán levő íve a keresett látókör–ív. k és f O metszéspontjából továbbmenve azonban csak akkor kapunk háromszöget, ha a PO, QO félegyenes metszi rendre az AQ, AP félegyenest.



1. ábra

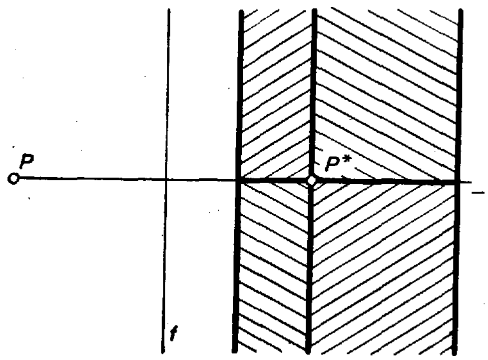
Ha a PP^* félegyenest P körül úgy fordítjuk el, hogy a PP^* egyenes A-t nem tartalmazó oldalára kerüljön, az elforgatásból kapott félegyenes egészen addig metszi az AP^* félegyenest, amíg párhuzamos nem lesz vele. Jelöljük A-nak PP^* felezőpontjára vonatkozó tükörképét A_1-gyel. Az APA_1P^* négyszög rombusz, és a PO, AQ félegyenesek akkor és csakis akkor metszik egymást, ha O az AA_1 szakaszon van. Legyen Q-nak f-re vonatkozó tükörképe Q^*, A-nak QQ^* felezőpontjára vonatkozó tükörképe pedig A_2. A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a QO és AP félegyenesek akkor és csakis akkor metszik egymást, ha O az AA_2 szakaszon van.

Vizsgáljuk meg először az $AP \leqq AQ$ esetet, vagyis azt, amikor P közelebb van f-hez, mint Q. Ekkor $AA_1 \leqq AA_2$, a hiányzó csúcsok szerkesztésének a feltétele tehát ebben az esetben az, hogy O az AA_1 szakaszon legyen. Nézzük meg, rögzített A, P, f mellett hol vehetjük fel a Q-t, ha ennek a teljesülését biztosítani akarjuk.

Emeljünk A_1-ben merőlegest f-re, messe ez AP^*-ot P_1-ben. $PA_1P_1\sphericalangle = PA_1A\sphericalangle + AA_1P_1\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ$, ha tehát Q azonos P_1-gyel, akkor O azonos A_1-gyel. Ha Q a P^*P_1 szakasz belsejében van, akkor A_1-ből a PQ szakasz $\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ$-nál kisebb szög alatt látszik, tehát A_1 kívül van k-n, és O az AA_1-szakasz belsejében van. Ha viszont Q a P^*P_1 félegyenes P_1 en túli pontja, akkor $PA_1Q\sphericalangle > \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ$, tehát O az AA_1 félegyenes A_1-en túli pontja lesz. Jelöljük a P, Q pontoknak f-től mért távolságát p-vel, q-val. Könnyen látható, hogy Q akkor és csakis akkor van a P^*P_1 szakasz belsejében, ha $q < 2p$. Ez tehát a szerkesztés végrehajtásának a feltétele, ha $q \geqq p$. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \geqq q$ mellett a megfelelő feltétel $p < 2q$. Ha viszont $p = q$, akkor $P^*Q \parallel f$, tehát az eddig mondottakat összefoglalva kapjuk, hogy a szerkesztés elvégzésének feltétele:

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < 2, \qquad p \neq q, \qquad PQ \text{ nem merőleges } f-\text{re}, \tag{3}$$

és természetesen f elválasztja a P, Q pontokat. Adott P, f mellett a megfelelő Q pontok mértani helyét a 2. ábra szemlélteti. (A vonalkázott síksáv pontjai felelnek meg, kivéve közülük a vastagon rajzolt szakasz és egyenesek pontjait.)



2. ábra

3. Megmutatjuk, hogy ha a szerkesztés végrehajtható, akkor helyes eredményre vezet. Valóban, a kapott ABC háromszögben f szögfelező, mert AB, AC szimmetrikus rá. O-ból a BC szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint a háromszögbe írható kör O_1 középpontjából. Ez csak úgy lehet, ha O azonos O_1 gyel, hiszen ha f és BC metszéspontját D-vel jelöljük, a DO_1 szakasz pontjaiból a BC szakasz BO_1C szögnél nagyobb szög alatt látszik, a DO_1 félegyenes O_1-en túli darabjának a pontjaiból pedig BC a BO_1C szögnél kisebb szög alatt látszik.

4. Meg kell még vizsgálnunk, hogy valóban csak akkor létezik megoldás, ha a szerkesztés végrehajtható. Könnyen látható, hogy ez csak lényegében van így, ha ugyanis Q azonos P^*-gal, akkor végtelen sok megoldás van, a szerkesztés mégsem hajtható végre a fentiek szerint. Ebben az esetben A az f egyenes tetszőleges, F-től különböző pontja lehet, és az A pont felvétele után a szerkesztés további lépései éppúgy végrehajthatók, mint a többi esetben. Ezzel a kiegészítéssel már pontosan igaz az állításunk, vagyis az, hogy ha az ABC háromszögben $AB \neq AC$, akkor mindig teljesül (3). Ekkor ugyanis P^* és Q különbözőek, és mivel mindkettő az AC egyenesen van, és ez sem nem párhuzamos f-fel, sem nem merőleges rá, már csak azt kell belátnunk, hogy $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < 2$. Ez viszont – mint láttuk - ekvivalens azzal, hogy a PO, AQ, valamint a QO, AP szakaszok metszik egymást, ami nyilván teljesül minden háromszögben.

II. megoldás (vázlat). Szerkesszük meg az A csúcsot ugyanúgy, mint az I. megoldásban. Mivel P egyenlő távolságra van a BC, AC egyenesektől, BC érinti a P középpontú, AC-t érintő p kört. Ugyancsak érinti BC a Q középpontú, AB-t érintő q kört. Ez a két kör szerkeszthető, a BC egyenes tehát a p, q körök közös érintőjeként megszerkeszthető.

Megjegyzések. **1.** Jelöljük a háromszög A-beli külső szögfelezőjét g-vel, g és BC metszéspontját R-rel (tegyük most fel, hogy $AB \neq AC$). Belátható, hogy R rajta van a PQ egyenesen, tehát A megszerkesztése után R is könnyen megkapható. Így viszont már ismerjük a BC egyenes egyik pontját, a II. megoldásban elég volna tehát a p, q körök egyikét megrajzolni, és ahhoz rajzolni R-ből érintőt.

2. Szimmetria és egyéb meggondolásaink a belső felező helyén külső szögfelezőre is érvényesek. Így bizonyos P, Q, f helyzetekben, amikor megállapításunk szerint „nincs megoldása” a feladatnak, olyan ABC háromszög adódik, amelyben f az A-nál levő külső szögeket felezi, PO és QO egyike szintén külső szögfelező és O átveszi a háromszöghöz hozzáírt (azaz külső érintő) körök valamelyike középpontjának a szerepét.

3. Ha az olvasó összehasonlítja az I. megoldást a II. megoldással, vagy a saját megoldásával, csodálkozva kérdezheti, miért olyan hosszú az I. megoldás. Sokszor elmondtuk már, a teljes megoldáshoz – szerkesztés esetében – nem elég a szerkesztés lépéseit sorra elmondani, azt is meg kell vizsgálni, mindig végrehajtható-e a mondott szerkesztés, mindig helyes eredményre vezet-e, és ha igen, hány megoldást kapunk. Ezeket a részeket azonban mi magunk se vesszük mindig ilyen részletesen sorra, mint ezt az I. megoldásban tettük. Nem tehetjük, mert – nincs rá helyünk. Ha már érezhetően sokat vagyunk kénytelenek elhagyni a teljes megoldásból, erre általában felhívjuk az olvasó figyelmét. De ez csak az egyik oka a megoldások változó hosszának. Nem mindig juthatunk vissza ugyanis a diszkusszióban – a lehetséges esetek különválasztásában – a kiindulási adatokig. Van, hogy csak annyit mondhatunk, hogy ha bizonyos metszéspont valahol a szerkesztési lépések elvégzése során létrejön, akkor van megoldás, vagy hogy annyi megoldás van, ahány metszéspontot kapunk. Az is előfordulhat, hogy az eredményt még külön ellenőrizni kell, és általában nem mondhatunk mást, mint hogy a szerkesztés helyes eredményre vezet – ha a kapott eredményre teljesülnek bizonyos feltételek. Elmondhatjuk tehát, hogy a teljes megoldás részei csak pontatlanul körvonalazhatók. Mit javasolhatunk mégis a pontverseny résztvevőinek? Törekedjenek a teljességre. Ne elégedjenek meg a megoldás alapötletének megtalálásával. A dolgozat kiértékelésekor mi általában nem azt vizsgáljuk, elérnek-e azok bizonyos eleve adott színvonalat, hanem azt, kik jutottak legtovább a kérdés vizsgálatában.