$$(1)\quad y=x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{y}}}}},\quad (2)\quad x+y=6.$$

Tekintsük először az (1) egyenlet helyett a nála egyszerűbb

$$y=x+\sqrt{y} \tag{3}$$

egyenletet. Azt állítjuk, hogy a (3), (2) rendszer megoldása kielégíti az (1), (2) egyenletrendszert is. Oldjuk meg ehhez a (3) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszert! (2)-t (3)-ba helyettesítve:

$$2y-\sqrt{y}-6=0$$

másodfokú egyenlet $\sqrt{y}$-ra. Ennek egyetlen nemnegatív gyöke $\sqrt{y}=2$, ahonnan (2) szerint a (2), (3) egyenletrendszer egyetlen megoldása

$$y=4,\qquad x=2. \tag{4}$$

Ez az értékpár kielégíti az (1) egyenletet is, hiszen mindegyik négyzetgyökjel alatt álló kifejezés értéke $2+2=4$ lesz.

Azt állítjuk, hogy az (1), (2) egyenletrendszernek nincs más megoldása. Ehhez elegendő belátnunk, hogy az egyenletrendszer minden x, y megoldása kielégíti a (3) egyenletet. Ezt az állítást indirekt úton bizonyítjuk be: feltesszük, hogy van olyan x,y pár, mely kielégíti az (1), (2) egyenleteket, de (3)-at nem. Ebből a feltevésből ellentmondásra jutunk.

Ha (3) nem áll fenn, akkor vagy $y<x+\sqrt{y}$ vagy pedig $y>x+\sqrt{y}$. Tekintsük az első esetet. Mivel x és y olyan számokat jelentettek, melyek az (1) egyenletet kielégítik, azért $y\geq 0$ és $x+\sqrt{y}\geq 0$ is fennáll. Így az $y<x+\sqrt{y}$ egyenlőtlenség mindkét oldalából négyzetgyököt vonhatunk:

$$\sqrt{y}<\sqrt{x+\sqrt{y}},\quad x+\sqrt{y}<x+\sqrt{x+\sqrt{y}},\quad \text{vagyis}\quad y<x+\sqrt{y}$$

miatt az

$$y<x+\sqrt{x+\sqrt{y}}$$

egyenlőtlenség is áll. Ebből ugyanígy azt kapjuk, hogy az

$$y<x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{y}}}$$

is igaz, végül pedig azt kapjuk, hogy az

$$y<x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{y}}}}$$

(1974 gyökjel) egyenlőtlenség is igaz. Ezt (1)-gyel összevetve $y<y$, ami nem lehet, ellentmondás.

Hasonlóan juthatunk ellentmondásra az $y>x+\sqrt{y}$ esetben. Így az eredeti egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x=2,\quad y=4.$$