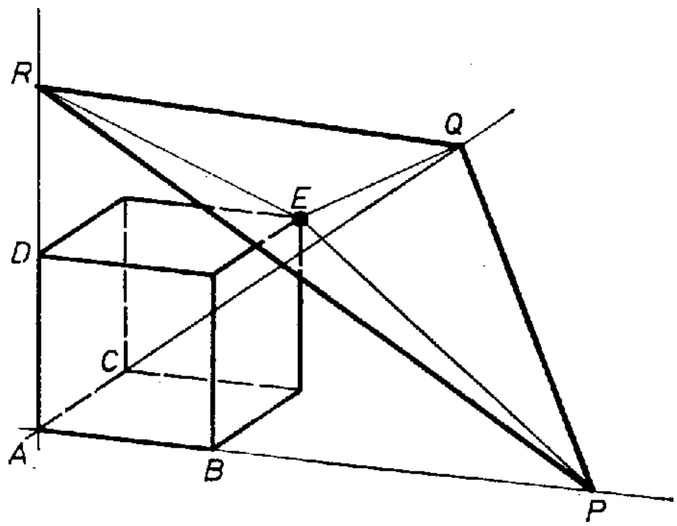
Válasszuk egységnek a kocka élét, és jelöljük az AP, AQ, AR szakaszok hosszát rendre p-vel, q-val, r-rel. Az $APQR$ tetraéder összeállítható az $APQE$, $AQRE$, $ARPE$ tetraéderekből, amelyek mindegyikében az E-hez tartozó magasság a kocka valamelyik oldaléle, tehát egységnyi.



A szemközti lapok területének kétszerese rendre pq, qr, rp, tehát az $APQR$ tetraéder térfogatának hatszorosa

(1) $$6V = pq + qr + rp.$$

Mivel ebben a tetraéderben az APQ alap területe $\frac{1}{2}pq$, és a hozzá tartozó magasság r, a térfogatot közvetlenül kiszámolva kapjuk, hogy

(2) $$6V = pqr.$$

Ezek szerint

$$pq + qr + rp = pqr,$$

azaz

(3) $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Ha a PQR sík merőleges AE-re, az AE egyenes körül forgatva önmagába megy át. Mivel az AE egyenes körüli $120°$-os forgatás a kockát önmagába viszi át, ez történik a PQR háromszöggel is, tehát ebben az esetben $p = q = r$. Ez (3) szerint csak úgy lehetséges, ha $p = q = r = 3$, amikor is (2) szerint $V = 4{,}5$ térfogategység. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha a pozitív p, q, r számokra teljesül (3), akkor

(4) $$pqr \geq 27,$$

és itt egyenlőség csak a $p = q = r = 3$ esetben lehet.

Jelöljük a $\frac{3}{p}$, $\frac{3}{q}$, $\frac{3}{r}$ számokat rendre x, y, z-vel.
Ezek is pozitívak, és velük megfogalmazva a bizonyítandó állítást, azt kapjuk, hogy ha

(3a) $$x + y + z = 3,$$

akkor

(4a) $$xyz \leq 1,$$

és itt egyenlőség csak akkor van, ha $x = y = z = 1$. Jelöljük $x + y$ értékét w-vel, akkor $(x - y)^2 \geq 0$ miatt $4xy \leq w^2$, tehát

$$4xyz \leq w^2 z = w^2(3 - w) = 4 - (w - 2)^2(w + 1).$$

Itt $w > 0$ miatt $(w - 2)^2(w + 1) \geq 0$, tehát valóban $4xyz \leq 4$, és egyenlőség csak abban az esetben lehet, ha $w = 2$ és $4xy = w^2$, azaz $x = y = z = 1$. Állításunk bizonyítását ezzel befejeztük.