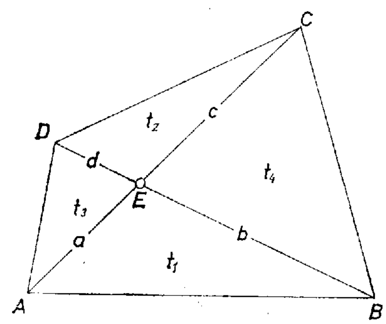
(1) $$\sqrt{t}=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}.$$

Jelöljük az AE, BE, CE, DE szakaszok hosszát rendre a-val, b-vel, c-vel, d-vel, és az ADE, BCE háromszögek területét t_3-mal, t_4-gyel.



Mivel (1) mindkét oldalán pozitív mennyiség áll, (1) ekvivalens a belőle négyzetre emeléssel kapott

$$t=t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}$$

feltétellel, amiből

(2) $$t=t_1+t_2+t_3+t_4$$

alapján a

(3) $$t_3+t_4=2\sqrt{t_1t_2}$$

feltételt kapjuk.

Az ABE, BCE háromszögek AE, CE oldalának egyenese közös, ezért e háromszögek területének aránya:

(4) $$t_1:t_4=a:c.$$

Hasonlóan kapjuk,hogy

$$t_3:t_2=a:c,$$

tehát $t_1:t_4=t_3:t_2$, azaz $t_1t_2=t_3t_4$, így (1) és (3) ekvivalensek a

$$t_3+t_4=2\sqrt{t_3t_4}$$

feltétellel, amiből a

$$\left(\sqrt{t_3}-\sqrt{t_4}\right)^2=0$$

feltételt, és ebből az

(5) $$t_3=t_4$$

feltételt kapjuk. Azt fogjuk megmutatni, hogy (4) akkor és csakis akkor teljesül, ha $AB||CD$.

A már bizonyított (4) összefüggéshez hasonlóan kapjuk, hogy

$$t_1:t_3=b:d,$$

tehát

$$\frac{t_3}{t_4}=\frac{t_1t_3}{t_1t_4}=\frac{ad}{cb}.$$

Emiatt (5) ekvivalens az

(6) $$a:b=c:d$$

feltétellel, ez pedig azzal, hogy az ABE, CDE háromszögek hasonlóak, vagyis $AB||CD$, amint azt bizonyítani akartuk.

Fábián Csaba (Székesfehérvár, József A. Gimn.)
Hujter Mihály (Pápa, Türr I. Gimn.)

Megjegyzés. Azt, hogy a négyszög konvex, több helyen is felhasználtuk: ez biztosítja, hogy E belső pont, ami kell (2)-höz, és a legutolsó lépéshez, amelyben kihasználtuk, hogy az ABE, CDE háromszögek „egymással szemben" vannak.