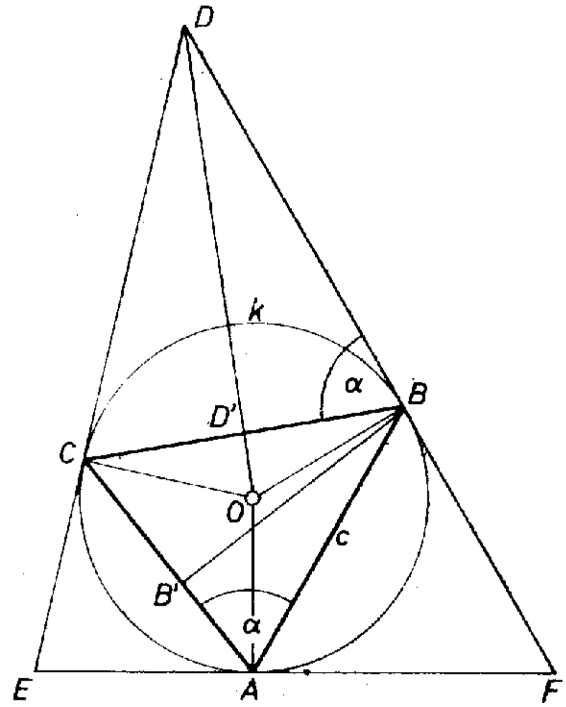
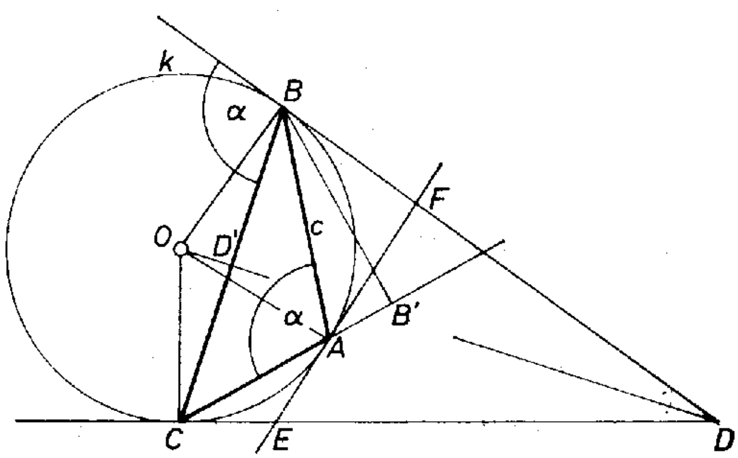
Legyen a B-beli és a C-beli érintők metszéspontja D, és messe az A-beli érintő az előbbi kettőt rendre F-ben, E-ben. A derékszög kizárása folytán e metszéspontok mindig létrejönnek, hiszen az ABC háromszögnek egyik oldala sem átmérő a körülírt k körben, és így az érintők közt nincsenek párhuzamosak. Az érintő szakaszok egyenlők : $DB = DC,\ EC = EA,\ FA = FB$.



1. ábra

A DEF háromszög oldalait az érintőszakaszokból kizárólag összeadással kapjuk, ha az ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), illetve vegyesen összeadással és kivonással, ha az ABC háromszögben tompaszög is van (a 2. ábrán az A csúcsnál).



2. ábra

Más szóval: az adja ezt a megkülönböztetést, hogy k a DEF háromszögnek az 1. ábrán beírt köre, a 2. ábra felvételében pedig az EF oldalához hozzáírt, külső érintő köre. Mindkét esetben $EF = EA + AF$, az 1. ábrán hasonlóan $FD = FB + BD$ és $DE = DC + CE$, viszont a 2. ábrán $FD = BD - BF,\ DE = CD - CE$. Így a DEF háromszög p kerülete az 1. és a 2. ábra esetében rendre

$$p_1 = 2(BD + CE + AF), \qquad p_2 = 2 \cdot BD.$$

A DB érintőszakasz hosszát a DBD' derékszögű háromszögből számítjuk, ahol D' a D-nek BC-n levő vetülete, vagyis a BC oldal felezőpontja. A $D'BD$ szög érintőszárú kerületi szög a k-ban, pontosabban az a BC ív van a szárai között, amely rendre nem tartalmazza, illetve tartalmazza az A csúcsot. Így az 1. ábra esetében $D'BD\sphericalangle = \alpha$, a 2. ábrán $D'BD\sphericalangle = 180° - \alpha$. Rendre ugyanekkora a $B'AB$ szög, ahol B' a B csúcs vetülete az AC egyenesen (az

AC szakaszon, illetve ennek A-n túli meghosszabbításán), így a BDD' és ABB' háromszögekből, a szokásos rövid jelölésekkel mindkét esetben

$$BD = \frac{BD'}{AB'} \cdot AB = \frac{ac}{2 \cdot AB'}.$$

Az AB' vetület hosszát úgy kapjuk, hogy Pitagorasz tételét alkalmazzuk a $BB'C$ és $BB'A$ háromszögek közös befogójára. A két helyzet szerint $CB' = CA \mp AB' = b \mp AB'$, így

$$\begin{aligned} B'B^2 = BC^2 - B'C^2 &= BA^2 - B'A^2, \\ a^2 - (b \mp AB')^2 &= c^2 - B'A^2, \\ AB' &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\pm 2b}. \end{aligned}$$

Eszerint a hegyesszögű, illetve a tompaszögű háromszög esetében

$$BD = \frac{abc}{c^2 + b^2 - a^2}, \qquad \text{ill.} \qquad BD = \frac{abc}{a^2 - b^2 - c^2}.$$

Az elsőből az $A,\ B,\ C$, az $a,\ b,\ c$, valamint a $D,\ E,\ F$ betűket ciklikusan fölcserélve

$$CE = \frac{bca}{a^2 + c^2 - b^2}, \qquad AF = \frac{cab}{b^2 + a^2 - c^2},$$

és így a kerület keresett kifejezései:

$$p_1 = 2abc \left(\frac{1}{c^2 + b^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{b^2 + a^2 - c^2} \right), \quad p_2 = \frac{2abc}{a^2 - b^2 - c^2}.$$

Az előforduló nevezők mindegyike pozitív, ugyanis bármelyiknek az eltűnéséből Pitagorasz tételének megfordítása alapján az következnék, hogy az ABC háromszög valamelyik szöge derékszög.

Zelhofer Walter (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn.)

Megjegyzés. AB' kifejezését gépiessé tette volna a cosinustétel alkalmazása. De ez sem tette volna mellőzhetővé a 2. ábra esetének külön vizsgálatát.