

Mivel a két szám jegyei ugyanazok s összegük 10 000 000 000, a legkisebb 11-jegyű szám, azért mindkét számnak 10-jegyűnek kell lennie. Megmutatjuk, hogy a két szám utolsó jegye csak nulla lehet. Ebből már következik, hogy mindkettő osztható 5-tel, sőt még 10-zel is.

Az állítást indirekt módon fogjuk bizonyítani. Feltesszük, hogy az állítás nem igaz, azaz hogy a két szám közül legalább az egyiknek utolsó számjegye nem nulla – ebből ellentmondást fogunk kihozni. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy kiinduló állításunk téves volt, vagyis mindkét szám utolsó jegye 0.

Tegyük fel tehát, hogy a két szám közül legalább az egyik utolsó számjegye nem nulla. A két szám összege 0-ra végződik, azaz az utolsó számjegyek összege vagy 0 vagy 10. De 0 nem lehet, éppen feltevésünk értelmében, így az utolsó helyen álló számjegyek összege pontosan 10 lesz, és 1 maradékot kapunk. A következő, tízes helyiértéken is nullát kapunk az összeg eredményéül, ez viszont az 1 maradék miatt csak úgy lehetséges, ha a két számban a tízes helyiértéken álló számjegyek összege 9 (még az 1 maradék adja ki a 10-et). Így a második helyiértékről is kapunk egy maradékot.

Ezt így folytathatjuk tovább, azaz a két számban a másodiktól a tizedik helyiértékig az egymás alatt álló számjegyek összege 9 lesz, az egyesek helyiértéken álló számjegyek összege pedig 10. Összesen tehát a két számban található számjegyek összege  $9 \cdot 9 + 10 = 91$ .

Tudjuk, hogy a két számban ugyanazok a számjegyek szerepelnek, csak más sorrendben. Ez viszont azt jelenti, hogy ha két szám számjegyeinek összegét számítjuk ki, akkor minden számjegy páros sokszor szerepel, azaz páros számot kell kapnunk. Az előbb kapott 91 viszont páratlan szám – ellentmondás, az állítás bizonyítását befejeztük.

*Megjegyzés.* A megoldásban csak annyit bizonyítottunk, hogy a feladat követelményeit kielégítő két számnak nullára kell végződnie. Hogy ilyen két szám egyáltalán van, azt nem bizonyítottuk. Ilyen számok:

$$\begin{array}{r}
 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 0 \\
 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 5 \ 0 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

Még az is igaz, hogy az ilyen számok tízes helyiértékű jegye csak 5-ös vagy 0 lehet, tehát a számok nemcsak 5-tel, hanem 50-nel is oszthatók.