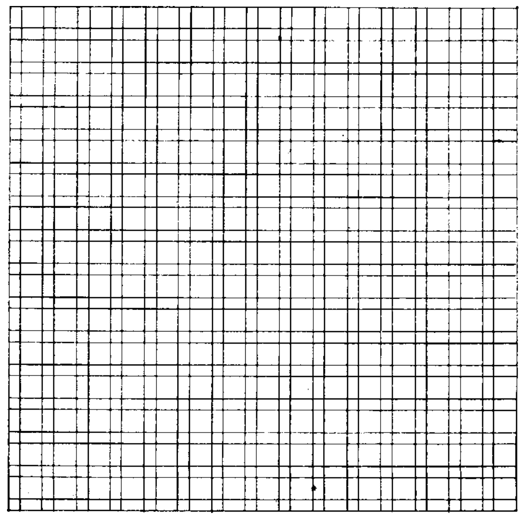
Az ábrán látható téglalapok oldalegyenesei az ábra egyenesei közül valók. Az ábrán 31 vízszintes és 31 függőleges egyenes van. Az első vízszintes egyenest 31-féleképpen választhatjuk, a másodikat a többi 30 közül 30-féleképpen. Így azonban minden lehetséges választást kétszer állítottunk elő: egyszer, amikor a kettő közül az alsót választjuk először, és másodszor, amikor a felsőt. Egy téglalap vízszintes oldalait tehát $\frac{30 \cdot 31}{2} = 465$-féleképpen választhatjuk ki az ábra egyenesei közül. Ezek mindegyikéhez 465-féleképpen választhatjuk meg a függőleges oldalakat, így az összes téglalap száma $465^2 = 216\,225$.



A választott téglalap akkor lesz négyzet, ha függőleges oldalainak a távolsága egyenlő a vízszintes oldalak távolságával. Válasszuk egységnek a szomszédos párhuzamosok között fellépő legkisebb távolságot. Ekkor az ábrán látható legkisebb négyzet oldala 1 egység, a legnagyobbé 45 egység. Nevezzük az egységnyi távolságra levő párhuzamosok közti síkrészt keskeny csíknak, a szomszédos, egymástól 2 egységre levő egyenesek által határolt sávot pedig széles csíknak. Vegyünk fel két tetszőleges párhuzamos egyenest, és számoljuk meg, hány keskeny és hány széles csík van közöttük. Legyen az előbbiek száma k, az utóbbiaké l, akkor a két egyenes távolsága $d = k + 2l$. Itt k és l különbsége legfeljebb 1 lehet, hiszen a keskeny és széles csíkok felváltva követik egymást, tehát $k = l + \varepsilon$, ahol ε értéke -1, 0, vagy $+1$, és a két egyenes távolsága $d = 3l + \varepsilon$. Eszerint a négyzetek oldalának a hossza 1 és 45 között bármilyen egész szám lehet, és az oldal hossza egyértelműen meghatározza a négyzetben levő széles csíkok számát: ez az oldal hosszához legközelebb levő 3-mal osztható egész harmada. Az oldal hossza és a széles csíkok száma pedig egyértelműen meghatározza a keskeny csíkok számát is.

Ha az oldal hossza osztható 3-mal, mondjuk $3n$, akkor $l \leq n \leq 15$, $k = l = n$, és a négyzetben összesen $2n$ csík van. Az első csíkot az ábrán látható 30 csík közül $30 - (2n - 1) = (31 - 2n)$-féleképpen választhatjuk meg, hiszen utána még $(2n - 1)$ csíknak kell elférnie. Tehát a $3n$ oldalú négyzetek száma $(31 - 2n)^2$, és azoknak a négyzeteknek a száma, amelyeknek az oldala osztható 3-mal

$$A = 29^2 + 27^2 + \ldots + 3^2 + 1^2.$$

Ha az oldal hossza $(3n + 1)$ alakú, akkor $0 \leq n \leq 14$, és $k = n + 1$, $l = n$. Ebben az esetben az első és az utolsó csík keskeny, és az első csíkot a 15 keskeny csík közül $(15 - n)$-féleképpen választhatjuk ki. Tehát az ilyen négyzetek száma

$$B = 15^2 + 14^2 + \ldots + 2^2 + 1^2.$$

Ha az oldal hossza $(3n - 1)$ alakú, akkor $1 \leq n \leq 15$, és $k = n - 1$, $l = n$. Ebben az esetben a szélső csíkok szélesek, és az első csíkot $(16 - n)$-féleképpen választhatjuk ki. Az ilyen négyzetek száma szintén B, és az összes négyzet száma $N = A + 2B$.

Megjegyzés. Nem tekintettük a teljes megoldás részének N numerikus kiszámolását, hiszen az első n négyzetszám összegére vonatkozó

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggést a gyakorlatok megoldói még nem tanulják. Ennek alapján

$$N = S_{30} - 2 \cdot S_{15} = 6975,$$

hiszen $B = S_{15}$, és $A = S_{30} - 4S_{15}$.