A megoldáshoz a következő elvet használjuk fel: abból indulunk ki, hogy az (1) egyenletnek van olyan x, y, u, t megoldása, melyre $x=y=u=t=0$ nem teljesül. Ekkor az összes ilyen megoldások között kell léteznie (legalább egy, de lehet hogy több) olyan megoldásnak is, melyben x, y, u, t abszolút értékei közül a maximális a lehető legkisebb. Tekintsünk egy ilyen megoldást. Ennek segítségével konstruálunk egy olyan másik, x', y', u', t' megoldást, melyben továbbra sem lesz mindegyik tag nulla, és abszolút értékük csökken. Ezzel máris ellentmondásra jutottunk: feltettük, hogy x, y, u, t volt a legkisebb megoldás, mégis találtunk kisebbet.

Az ötlet megvalósításához azt az egyszerű tényt használjuk fel, hogy ha két négyzetszám összege osztható hárommal, akkor a négyzetszámok külön-külön oszthatók hárommal. Ez egyszerűen abból következik, hogy négyzetszámot hárommal osztva csak nulla vagy egy maradékot kaphatunk:

$$(3k)^2=9k^2; \qquad (3k\pm 1)^2=3(3k^2\pm 2k)+1.$$

Két, nulla vagy egy maradékú szám összege csak akkor adhat nulla maradékot, ha mindkét maradék eredetileg is nulla volt.

Tegyük fel tehát, hogy x, y, u, t az a bizonyos legkisebb megoldás, amelyben nem mindegyik szám nulla. Feladatunk olyan x', y', u', t' megoldást készíteni, melyben továbbra sem lesz mindegyik szám nulla, de a számok abszolút értékei csökkennek.

$1974=3\cdot 658$, azaz 1974 hárommal osztható. Ez (1) szerint azt jelenti, hogy x^2+y^2 is osztható hárommal. Előbbi megjegyzésünk szerint ekkor x^2 és y^2 is osztható hárommal, ami csak úgy lehetséges, ha az alapok is oszthatók hárommal:

$$x=3x', \qquad y=3y'. \tag{2}$$

Ezt (1)-be írva:

$$9x'^2+9y'^2=3\cdot 658(u^2+t^2)$$
$$3(x'^2+y'^2)=658(u^2+t^2). \tag{3}$$

De 658 nem osztható hárommal, így (3) csak úgy állhat fenn, ha u^2+t^2 osztható hárommal. Ismét előbbi megjegyzésünket alkalmazva u és t is osztható hárommal:

$$u=3u', \qquad t=3t'. \tag{4}$$

Ezt (3)-ba helyettesítve

$$x'^2+y'^2=3\cdot 658(u'^2+t'^2).$$

Láthatjuk, hogy x', y', u', t' is kielégíti az (1) egyenletet. Másrészt (2) és (4)-ből látható, hogy abszolútértékben csökkent mindegyik szám, és x, y, u, t közül valamelyik nem volt nulla, akkor a megfelelő vesszős párja sem lesz nulla.

Ezzel a keresett kisebb megoldást előállítottuk. A megoldás elején említettek szerint ez pedig valóban azt jelenti, hogy az egyenletnek az $x=y=u=t=0$ kívül más egész megoldása nincs.

Megjegyzések. 1. A megoldásban használt elvet „végtelen leszállás” elvének, „descente infinie”-nek szokás nevezni. Az elnevezés arra utal, hogy tulajdonképpen az ellentmondást abból kaptuk, hogy a pozitív egész számokon nem tudunk „végtelen sokáig lefelé menni”, előbb-utóbb el kell jutnunk az 1-hez. Ez az elv a teljes indukció mellett az egyik leggyakrabban használható módszer, amikor egész számokra kell valamit bizonyítani. A végtelen leszállás elve bizonyos értelemben a teljes indukció megfordítása: míg a teljes indukció „felfelé bizonyít”, azaz kisebb értékekről egyre nagyobb értékekre, addig a végtelen leszállás lefelé tagad”: nagyobb értékekből készítünk ellenpéldát kisebb értékekre. A két elv így egymásnak mintegy kiegészítője, de kapcsolatuk annyira szoros, hogy mindegyiket a másikból be lehet bizonyítani.

2. A megoldás második részében azt használtuk ki, hogy ha 3 osztója két négyzetszám összegének, akkor osztója külön-külön is a négyzetszámoknak. Ez a tulajdonsága nemcsak a 3-nak, hanem általában minden $(4k-1)$ alakú prímszámnak is megvan. (Lásd például Hajós-Neukomm-Surányi: Matematikai Versenytételek, II. rész, 61. oldal.) Mivel 1974 prímtényezős felbontása $2\cdot 3\cdot 7\cdot 47$ és itt 3-n kívül 7 és 47 is $(4k-1)$ alakú prímszám, 3 helyett 7-t vagy akár 47-t is mondhattunk volna.