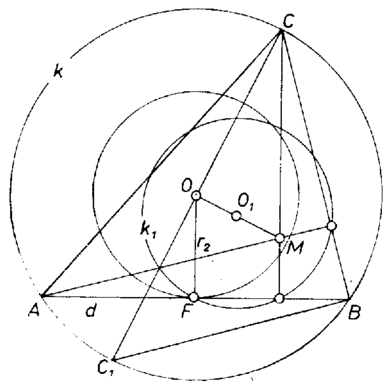
Jelöljük az adott kört $k$-val, középpontját $O$-val, sugarát $r$-rel, a magasságpontot $M$-mel, az adott hosszúságú oldal végpontjait $A$-val, $B$-vel, a harmadik csúcsot $C$-vel, $C$ $k$-beli átellenes pontját $C_1$-gyel, $AB$ felezőpontját $F$-fel. Ha az $A$-n átmenő magasságvonalat tükrözzük $F$-re, a tükörkép átmegy $B$-n, és merőleges $BC$-re, tehát Thalész-tétele szerint $C_1$-en is átmegy. Ugyancsak átmegy $C_1$-en a $B$-n átmenő magasságvonal $F$-re vonatkozó tükörképe, tehát $M$-nek $F$-re vonatkozó tükörképe $C_1$. Emiatt $F$ rajta van $k$-nak az $M$ centrumú, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítésből származó képén, $k_1$-en. E kör középpontja az $MO$ szakasz $O_1$ felezőpontja, sugara $\frac{r}{2}$.




Pitagorasz-tétele szerint

$$OF = r^2 - \frac{d^2}{4},$$

ahol $d$ az $AB$ hossza, tehát $F$ rajta van a $O$ középpontú, $r^2 = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$ sugarú $k_2$ körön is.

A $k_2$ kört megkapjuk, ha $k$-ban tetszőleges $d$ hosszúságú húrt veszünk fel, $r_2$ ennek a húrnak $O$-tól mért távolsága. Megszerkeszthetjük $k_1$-et is, $k_1$ és $k_2$ metszéspontjainak egyike lesz $F$. Mivel a két metszéspont szimmetrikus $OM$-re, az egyikből kapott háromszöget $OM$-re tükrözve a másikhoz tartozó megoldást kapjuk. Legyen tehát a metszéspontok egyike $F$ (vagy ha a két kör érinti egymást, $F$ legyen az érintési pont). $M$-nek $F$-re vonatkozó tükörképe $C_1$, $C_1$-nek $k$-beli átellenes pontja $C$, az $A$, $B$ csúcsokat pedig az $OF$-re $F$-ben emelt merőleges metszi ki $k$-ból.

Az így megszerkesztett háromszögnek $k$ körülírt köre, $AB$ hossza $2\sqrt{r^2 - r_2^2} = d$, és $M$ a háromszög magasságpontja, hiszen az egyik csúcs átellenes pontjának a szemközti oldalfelezőpontjára vonatkozó tükörképe.

A $k_1$, $k_2$ körök létrejönnek, ha $0 < d < 2r$. E két kör metszi egymást, ha

$$|r_1 - r_2| < \frac{1}{2}OM < r_1 + r_2$$

azaz

$$\left|r - \sqrt{4r^2 - d^2}\right| < OM < r + \sqrt{4r^2 - d^2}.$$

Ha itt egyenlőtlenség helyett valahol az egyenlőség jele érvényes, $k_1$ és $k_2$ érinti egymást. Ha $d = 2r$, $OM$ értéke csak $r$ lehet, azaz $M$ rajta van $k$-n. Tehát a keresett háromszögben $C$-nél derékszög van, $C$ azonos $M$-mel, és $AB$ a $k$ kör tetszőleges $M$-en át nem menő átmérője lehet. Különben $r_2 > 0$, tehát $F$ nem lehet $O$-val azonos, és így $AB$-t $F$ már egyértelműen meghatározza.

Ha tehát $d > 2r$, nincs megoldás, $d = 2r$ esetén csak akkor van megoldás, ha $M$ rajta van $k$-n, ekkor viszont végtelen sok megoldás van. Ha $0 < d < 2r$, a megoldások száma rendre 2, 1, vagy 0, ha $OM$ hossza az $\left|r - \sqrt{4r^2 - d^2}\right|$, $r + \sqrt{4r^2 - d^2}$ értékek közé esik, ezek egyikével egyenlő, vagy e határokon kívül esik.