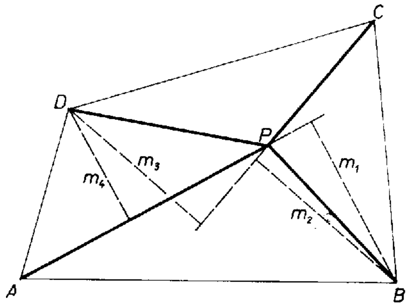
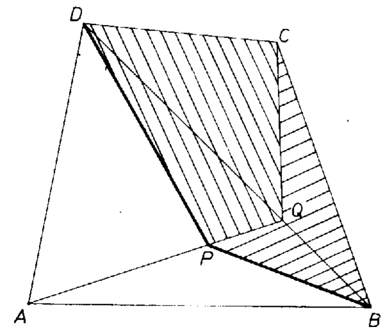
I. megoldás. Válasszuk a PAB, PDA háromszögekben PA-t, a PBC, PCD háromszögekben PC-t alapnak, és jelöljük a megfelelő magasságokat rendre m_1-gyel, m_4-gyel, m_2-vel és m_3-mal.





A területszorzatokra előírt egyenlőség szerint:

$$\frac{APm_1}{2} \cdot \frac{CPm_3}{2} = \frac{CPm_2}{2} \cdot \frac{APm_4}{2}.$$

Ahonnan

$$m_1 : m_4 = m_2 : m_3. \tag{1}$$

Jelöljük az m_i-edik magasság talppontját M_i-vel ($i = 1, 2, 3, 4$). Az arányok meghatározása céljából húzzuk meg a négyszög BD átlóját. Ez PA egyenest E-ben, PC egyenest F-ben metszi. Az $M_1BE \sim M_4DE$ háromszög és $M_2BF \sim M_3DF$ háromszög és ezért

$$\begin{aligned} m_1 : m_4 &= BE : ED \\ m_2 : m_3 &= BF : FD. \end{aligned} \tag{2}$$

(1) és (2) összevetéséből adódik, hogy $E \equiv F$. Ez akkor teljesül, ha P a BD átlón van, vagy az AP és PC egyenes egybeesik, azaz P az AC átló pontja.

A keresett mértani hely tehát a négyszög két átlója.

II. megoldás. Jelöljük az AP, BD egyenesek metszéspontját Q-val, és egy-egy idom területét csúcsainak zárójelben való felsorolásával. Az ABQ, ADQ háromszögeknek BQ, DQ alapjához tartozó magassága ugyanaz a szakasz, emiatt a háromszögek területének az aránya egyenlő alapjaik hosszának az arányával:

$$(ABQ) : (ADQ) = BQ : DQ.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$(BCQ) : (CDQ) = BQ : DQ$$
$$(PBQ) : (PDQ) = BQ : DQ.$$

Ha P az AQ szakaszon van, akkor ezekből azt kapjuk, hogy

$$(ABP) : (ADP) = (BCQP) : (CDPQ),$$

Ha pedig P a QC szakaszon van, akkor

$$(ABPQ) : (DAPQ) = (BCP) : (CDP).$$

Tehát P a vizsgált mértani helyhez tartozik, ha az itt szereplő négyszögek valójában csak háromszögek. Így van ez, ha P és Q azonos, vagyis P a BD átlón van, vagy P és Q rajta van az AC átlón. Ha P az AQ szakasz belsejében van, és a PQ, QC szakaszok nem állnak össze egy egyenessé, a $(BCQP) : (CDPQ)$ arány nem egyenlő a $(BCP) : (CDP)$ aránnyal, hiszen e két arányban a tagok összege ugyanaz, a (BCD) terület, és a két arányban a megfelelő tagok nem egyenlőek. Hasonlóan kapjuk, hogy P akkor sem pontja a mértani helynek, ha a CQ szakasz belsejében van, és AQ, QC nem áll össze egyenessé. Tehát a keresett mértani hely az AC, BD szakaszok belső pontjainak az egyesítése.