(1) $$\sqrt[4]{16+x}+\sqrt[4]{16-x}=4.$$

I. megoldás. Emeljük négyzetre (1) két oldalát és a kapott egyenletben rendezés után ismét emeljünk négyzetre.

$$\sqrt{16+x}+\sqrt{16-x}=16-2\sqrt[4]{256-x^2},$$
$$32+2\sqrt{256-x^2}=256-64\sqrt[4]{256-x^2}+4\sqrt{256-x^2}.$$

Vezessük be új változónak a $\sqrt[4]{256-x^2}$ kifejezést, erre a fenti egyenletből az

$$y^2-32y+112=0$$

egyenletet kapjuk. Ennek a gyökei az $y_1=4$, $y_2=28$ számok, közülük csak az első jöhet szóba, hiszen $\sqrt[4]{256-x^2}\leqq 4$. Az elsőből az $x=0$ értéket kapjuk, amelyik valóban gyöke (1)-nek.

Piriti Zsuzsa (Nagykanizsa, Landler J. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Az egyenlet bal oldalának az értéke $x=0$ mellett 4, ez tehát gyöke (1)-nek. Megmutatjuk, hogy ha a, b tetszőleges nemnegatív számok, akkor

(2) $$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\leqq 2\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}},$$

és a két oldal csak akkor egyenlő, ha $a=b$. Emiatt ha $x\neq 0$, (1) bal oldalának az értéke – ha értelmezve van – kisebb, mint 4, tehát (1)-nek csak $x=0$ a gyöke.

Bizonyítsuk be előbb (2) helyett a négyzetgyökökre vonatkozó megfelelő állítást. Ha A, B tetszőleges nemnegatív számok, akkor

(3) $$\sqrt{A}+\sqrt{B}\leqq 2\sqrt{\frac{A+B}{2}},$$

és a két oldal csak akkor egyenlő, ha $A=B$. Mivel itt mindkét oldal nemnegatív, vehetjük a két oldal négyzetét:

$$A+2\sqrt{AB}+B\leqq 2(A+B),$$

amiből a $(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2\geqq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez valóban igaz, és itt a két oldal csak akkor egyenlő, ha $A=B$. Alkalmazzuk ezt az állítást az $A=\sqrt{a}$, $B=\sqrt{b}$ számokra, kapjuk, hogy

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\leqq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}}.$$

A jobb oldalon álló kifejezésre ismét alkalmazva (3)-at kapjuk, hogy

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}}\leqq 2\sqrt[4]{\frac{a+b}{2}}.$$

E két egyenlőtlenségből következik (2), és mivel az egyenlőség jele bennük csak az $a=b$ mellett érvényes azt is beláttuk, hogy ez (2) esetében is így van.

Megjegyzés. A bizonyított (2) egyenlőtlenséget a következő formában írhatjuk:

$$\left(\frac{a^{1/4}+b^{1/4}}{2}\right)^4\leqq\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezés az a és b számok 1/4-ed rendű *hatványközepének* hívják. Általában a_1, a_2, …, a_n számok α-ad rendű hatványközepének a

$$H_\alpha(a_1,\ldots,a_n)=\left(\frac{a_1^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$$

értéket hívjuk. Így például a számtani közép ugyanazoknak a számoknak elsőrendű hatványközepe. A hatványközepekre a következő tétel igaz, ha $\alpha<\beta$, akkor az α-rendű hatványközép nem nagyobb a β-rendű hatványközépnél, azaz

$$H_\alpha(a_1,\ldots,a_n)\leqq H_\beta(a_1\ldots,a_n),$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a_1=a_2=\ldots a_n$. A megoldásban az $n=2$, $\alpha=1/4$ és $\beta=1$ értékkel bizonyítottuk ezt az egyenlőtlenséget.