(1) $$a^b + b^a = 10 \cdot b^{a-2} + 100.$$

Alakítsuk át (1)-et a következő módon:

$$a^b = b^{a-2}(10 - b^2) + 100.$$

Először azokat a megoldásokat keressük, amelyekben $(10 - b^2) > 0$, azaz $b = 1$, 2 vagy 3. Az első esetben (2)-ből $a = 109$ adódik, tehát máris van egy megoldásunk: $a = 109$, $b = 1$.

A második esetben (2)-ből

(3) $$a^2 = 6 \cdot 2^{a-2} + 100$$

egyenletet kapjuk. Mivel $6 \cdot 2^{a-2}$ pozitív, itt csak 10-nél nagyobb értékek jöhetnének szóba $a$-ra, de

$$a^2 < 2^a, \qquad \text{ha} \qquad a > 4,$$

ami $2^a < 1{,}5 \cdot 2^a + 100 = 6 \cdot 2^{a-2} + 100$ miatt azt jelenti, hogy (3)-nak nincs gyöke a természetes számok körében. A (4) alatti állítás bizonyításának az érdekében először megjegyezzük, hogy ha $a = 4$, akkor (4) két oldala éppen egyenlő. Ettől kezdve, ha $a$ értékét eggyel növeljük, a jobb oldalnak az értéke kétszeresére nő, a bal oldalnak a növekedése viszont ennél lassúbb:

$$\frac{(a+1)^2}{a^2} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2} < \frac{a^2 + 3a}{a^2} < \frac{a^2 + a^2}{a^2} = 2.$$

Mivel tehát $a = 4$ mellett (4) két oldala egyenlő, $a = 5$ mellett a bal oldal már kisebb a jobb oldalnál, és ettől kezdve az is marad.

A harmadik esetben $b = 3$ helyettesítéssel (2)-ből az

(5) $$a^3 = 3^{a-2} + 100$$

egyenletet kapjuk. Itt $a^3 > 100$ miatt $a > 4$, $a = 5$, 6 mellett a két oldal nem egyenlő, $a = 7$ viszont újabb megoldást ad, ez a második gyöke (1)-nek: $a = 7$, $b = 3$. Ha $a \geq 8$, (5) bal oldala kisebb a jobb oldalnál, hiszen $a \geq 8$ mellett

(6) $$a^3 < 3^{a-2}.$$

Ezt ugyanúgy láthatjuk be, mint (4)-et: $a = 8$ mellett (6) már igaz, és ettől kezdve, ha $a$ értékét 1-gyel növeljük, a jobb oldal értéke megháromszorozódik, és a bal oldal növekedése ennél lassúbb:

$$\frac{(a+1)^3}{a^3} = \frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{a^3} < \frac{a^3 + 3a^2 + 4a}{a^3} < \frac{a^3 + 4a^2}{a^3} < \frac{2a^3}{a^3} < 3.$$

Ezzel a $(10 - b^2) > 0$ eset vizsgálatát befejeztük. A $(10 - b^2) < 0$, azaz $b \geq 4$ eset vizsgálatát kezdjük $a$ kis értékeinek a vizsgálatával. Ha $a = 1$, (1) a

$$b = \frac{10}{b} + 99$$

egyenletet jelenti. Ennek nyilván nincs gyöke a természetes számok körében. Ha $a = 2$, (1)-ből a

(7) $$2^b + b^2 = 110$$

egyenletet kapjuk. Itt $2^b < 110$ miatt $b \leq 6$, ekkor viszont $2^b + b^2 \leq 2^6 + 6^2 = 100$, tehát (7)-nek nincs gyöke a természetes számok körében. Végül, ha $a \geq 3$ és $b \geq 4$, akkor a (2)-vel ekvivalens

$$a^b + b^{a-2}(b^2 - 10) = 100$$

egyenletnek nincs gyöke, hiszen a bal oldalon

$$a^b \geq 3^4 = 81, \qquad b^{a-2} \geq 4, \qquad b^2 - 10 \geq 6,$$

így a bal oldal értéke legalább $81 + 4 \cdot 6 = 105$.

Összesen tehát két megoldást kaptunk, az $a = 109$, $b = 1$, és az $a = 7$, $b = 3$ értékpárokat.