Nézzük meg, hogy kilenc hatványainak mi lehet az utolsó két jegye.

$$\begin{array}{lllll} 9^0 = \mathbf{01}, & 9^1 = \mathbf{09}, & 9^2 = \mathbf{81}, & 9^3 = \mathbf{29}, & 9^4 = ...\mathbf{61}, \\ 9^5 = ..\mathbf{49}, & 9^6 = ..\mathbf{41}, & 9^7 = ..\mathbf{69}, & 9^8 = ..\mathbf{21}, & 9^9 = ..\mathbf{89}, \\ 9^{10} = ..\mathbf{01}, & 9^{11} = ...\mathbf{09}, & \text{stb.} & & \end{array} \tag{1}$$

Látjuk, hogy 9^{10}-nek utolsó két jegye ugyanaz, mint 9^0-nak, 9^{11} utolsó két jegye ugyanaz, mint 9^1-nek. Azt sejtjük, hogy 9 hatványainak utolsó két jegye 10 hosszúságú periódust alkot. Mivel egy 9-hatvány utolsó két jegyét megkaphatjuk úgy, hogy az előző hatvány utolsó két jegyét 9-cel megszorozzuk és ennek vesszük az utolsó két jegyét, azért ha két kilenchatványnak megegyezik az utolsó két számjegye, akkor a következőké is megegyezik, így a 12. és 2. hatvány utolsó két jegye is megegyezik, ... a 10. és 20. hatvány utolsó két jegye is, azaz a 20. hatvány is **01**-re végződik. Így valóban 9 hatványainak utolsó két jegye 10 hosszúságú periódust alkot. Ezek szerint ahhoz, hogy megtudjuk 9^h utolsó két jegyét, elegendő azt tudnunk, hogy $h = 8^g$-t 10-zel osztva milyen maradékot kapunk, azaz h-nak mi az utolsó jegye. Hasonlóan, mint az előbb, most 8 hatványainak utolsó jegyét vizsgáljuk:

$$8^1 = \mathbf{8}, \qquad 8^2 = \mathbf{64}, \qquad 8^3 = ..\mathbf{2}, \quad 8^4 = ..\mathbf{6}, \qquad 8^5..\mathbf{8}. \tag{2}$$

Láthatjuk, hogy ismét periodikus sorozatot kapunk, csak most a periódushossz 4 lesz. Így 8^g utolsó számjegyének meghatározásához elég tudnunk, hogy $g = 7^f$ 4-gyel osztva milyen maradékot ad. $f = 6^e$ és $e = 0$, azért f páros szám lesz: $f = 2f'$. Így $g = 7^{2f'} = 49f'$, ahonnan $g - 1 = 49^{f'} - 1 = 49^{f'} - 1^{f'}$ osztható $(49 - 1) = 48$-cal, és így néggyel is, azaz g néggyel osztva 1 maradékot ad. (2) alapján látjuk, hogy 8^g utolsó jegye megegyezik 8^1 utolsó jegyével. Így ez a jegy 8-as lesz, tehát $h = 8^g$ utolsó jegye 8. (1) szerint ekkor 9^h utolsó két jegye megegyezik 9^8 utolsó két jegyével, ami 21.

Tehát a 9^h hatvány utolsó két jegye 21.

Nagy Imre (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladatot a, b, c és d ismerete nélkül is megoldhatjuk, az eredmény nem változik. e-ről csak annyit használtunk ki, hogy nem nulla, ezt is csak azért, hogy f párosságát megmutassuk.