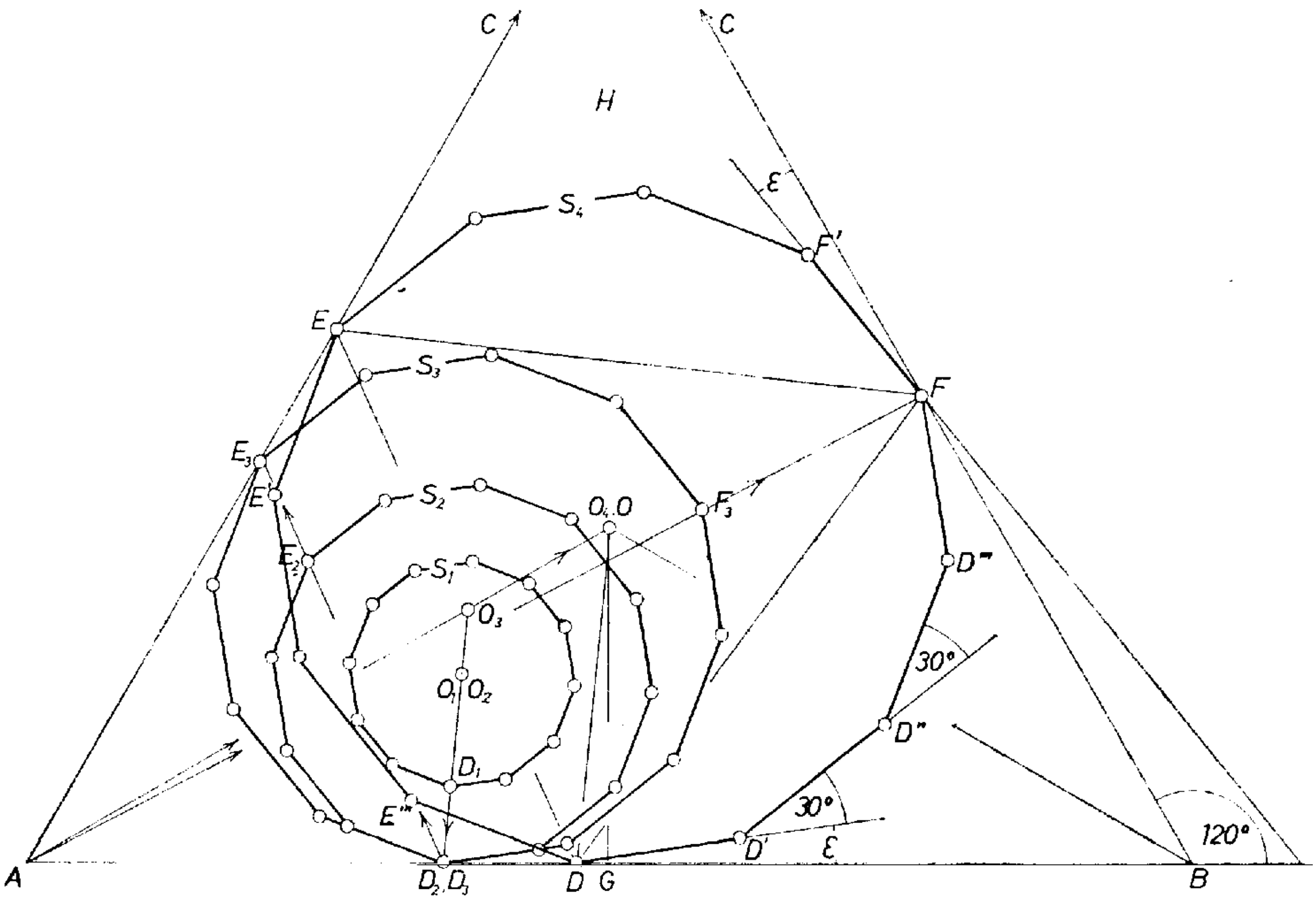
1. Azt állítjuk, hogy a maximális területű kivágott szabályos 12-szög lemeznek az adott $ABC = H$ háromszöglemez mindegyik oldalán van csúcspontja. Ha ugyanis egy S_1 szabályos 12-szög teljesen a H belsejében van, akkor nagyítható az O_1 középpontjábóI mint centrumból olyan S_2-vé, amelynek legalább egy csúcsa (azaz O_1-től legtávolabbi pontjainak egyike) rajta van H kerületén, de S_2-nek nincs pontja H-n kívül. Legyen egy ilyen csúcsa D_2 és H-nak ehhez támaszkodó oldala AB. Ha S_2-nek nincs pontja az AC, BC oldalak egyikén sem, akkor nagyítható az előbbi korlátozás mellett S_3-má úgy a D_2 centrumból, hogy S_3-nak már van egy E_3 csúcsa, mondjuk AC-n. És ha S_3 teljesen az A-t tartalmazó felében volna a BC-vel kettévágott síknak, akkor az A centrumból való alkalmas arányú nagyítással előálló S_4 szabályos 12-szögnek már a lemez BC oldalán is lesz egy F csúcsa; legyenek a D_2-ből és E_3-ból most nyert csúcsok D, ill. E.



Tegyük fel egyenlőre, hogy S_4-nek D-ből induló oldalai közül egyik sem illeszkedik AB-re, ekkor tekintsük D-ből F felé haladva S_4 egymás utáni oldalainak irányszögét AB-hez mint alapirányhoz viszonyítva. Azt akarjuk ezzel belátni, hogy F az S_4-nek D-től számítva negyedik csúcsa. Mivel a szabályos 12-szög külső szöge $360°/12 = 30°$, ezért az első (DD') oldal irányszöge $0°$ és $30°$ között van, a másodiké ($D'D''$-é) $30°$-kal nagyobb, tehát $30°$ és $60°$ között, a k-adiké $(k-1)\cdot 30°$ és $k\cdot 30°$ között. Másrészt BC irányszöge $120° = 4\cdot 30°$ vagyis a D-től számított 4. és 5. oldal irányszöge közé esik, és ez igazolja állításunkat. (Az 5. az FF'.) oldal egyenese már B-n túl metszi AB-t.) Hasonlóan az E csúcs sorszáma F-től is, D-től is 4, ennélfogva a DF, FE, ED átlók egyenlők.

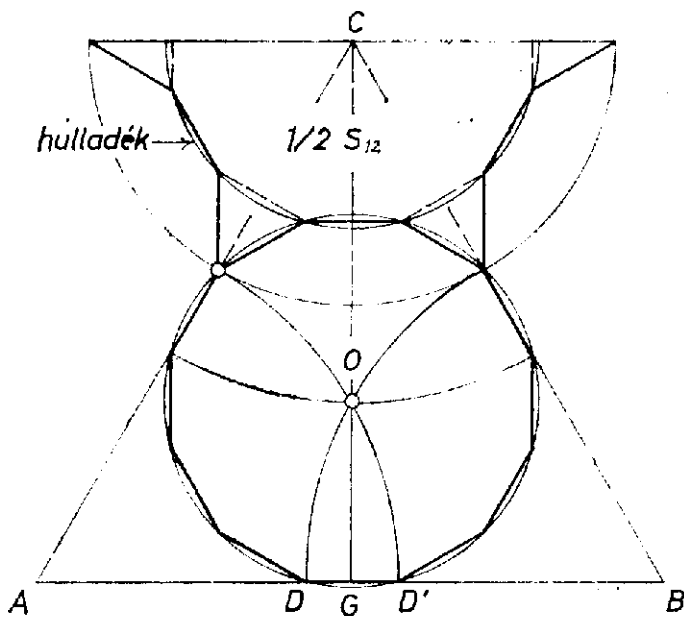
Pontosabban megnézve az is adódik, hogy az F utáni FF' oldalnak BC-hez viszonyított ε irányszöge egyenlő a $D'DB$ szöggel, így $FDB\sphericalangle = FDD'\sphericalangle + \varepsilon = EFF'\sphericalangle + \varepsilon = EFC\sphericalangle = DEA\sphericalangle$, tehát a DFB, FEC, EDA háromszögek (egyező körüljárással) egybevágók, egymásba átvihetők a DFE háromszög O_4 középpontja körüli $120°$-os elfordításokkal. Ámde A-nak, B-nek és C-nek ciklikusan egymásba $120°$-os elfordításokkal való átvitele csak H-nak O centruma körül lehetséges, eszerint S_4-nek O_4 középpontja azonos O-val.

Azt is föltehetjük, hogy a $D'DB\sphericalangle = E'''DA\sphericalangle$ – ez csak jelölés dolga –, így $DB \geq DA$.

Most már szinte nyilvánvaló, hogy az S_4-nél nagyobb szabályos 12-szög lemez is kivágható H-ból. Ilyet így kapunk: S_4-et addig fordítjuk el O körül, hogy DD' párhuzamos legyen AB-vel – eközben D és az egész S_4 a H belsejébe jut –, majd ezt a helyzetét nagyítjuk O-ból. Az arányt növelve D és D' (F, F' E, E') új helyzete egyszerre jut a háromszög kerületére és ennél nagyobb 12-szög nem vágható ki, hiszen akkor beírt körének sugara egyenlő a H-ba írt kör sugarával.

Mindjárt a nagyítások után adódott volna ez a helyzet, ha S_1-nek egy oldala párhuzamos AB-vel, így DD' vagy DE''' ráesik AB-re.

2. A kapott helyzetben ODB szög fele akkora, mint a 12-szög belső szöge, eszerint BOD egyenlő szárú háromszög, D-t a B körüli BO sugarú körrel metszhetjük ki, így pedig $DD' = 2(DB - GB) = 2 \cdot OB - AB = \frac{4}{3}CG - AB = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right) AB = 30{,}9$ mm (ahol G az AB oldal felezőpontja).



3. Ismeretes, hogy a szabályos 12-szög területe 3-szor akkora, mint a körülírt kör sugara fölé szerkesztett négyzet területe: $3 \cdot OD^2$.
$3 \cdot OD^2 = 3(OG^2 + DG^2) = (2 - \sqrt{3})AB^2$. A háromszöglemez területe $(\sqrt{3}/4) \cdot AB^2$, a hulladék $(5\sqrt{3} - 8)/4 \cdot AB^2$, ez $5 - \frac{8}{\sqrt{3}} = 0,381$ része az adott lemez területének.