$$x^2+y^2=13, \tag{1}$$
$$x^3+y^3=35. \tag{2}$$

1. Rendszerünket könnyen átalakíthatjuk úgy, hogy új ismeretleneknek az $x+y=u$ összeget és az $xy=v$ szorzatot tekinthessük:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v=13, \tag{1a}$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv=35. \tag{2a}$$

Innen v-t kiküszöbölve:

$$u^3-39u+70=0. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy $u_1=2$ kielégíti az egyenletet, és így a bal oldal átalakítható $(u-2)$ és egy másodfokú polinom szorzatává:

$$(u-2)\left(u^2+2u-35\right)=0.$$

Így pedig további két gyök adódik az

$$u^2+2u-35=0$$

egyenletből: $u_2=5$, $u_3=-7$. Tehát (3) bal oldala így írható:

$$(u-2)(u-5)(u+7).$$

Ez nem lehet 0, ha u értéke különbözik 2-től, 5-től és -7-től, tehát (3)-nak több gyöke nincs.

v megfelelő értékei $v_1=(u_1^2-13)/2=-4{,}5$; $v_2=6$, $v_3=18$.

2. Mármost az

$$x+y=u,$$
$$xy=v$$

rendszerből y kiküszöbölésével

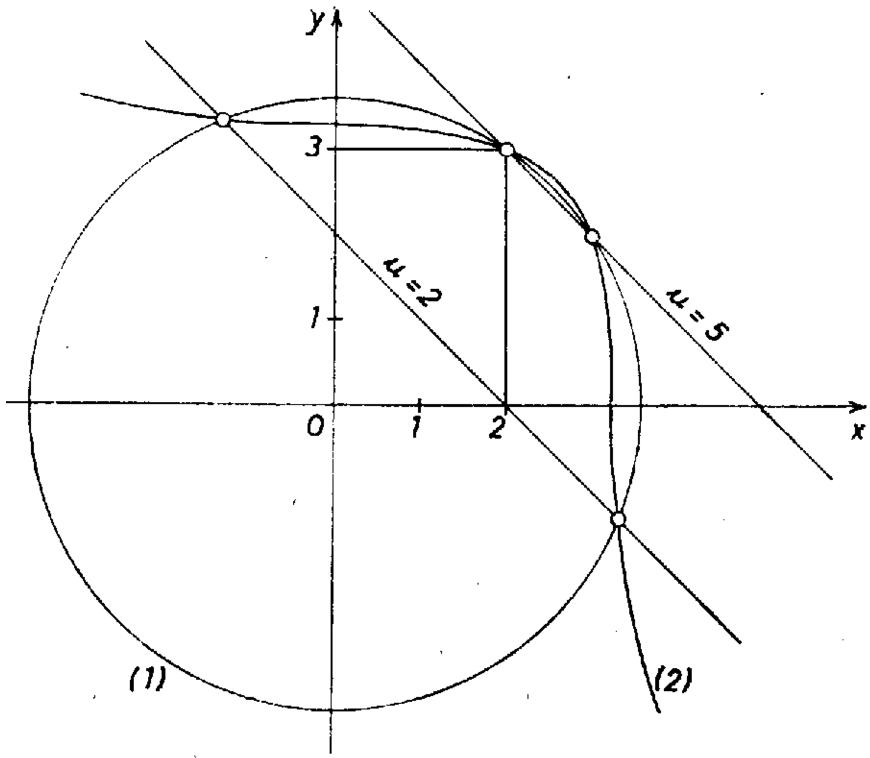
$$x^2-ux+v=0, \qquad x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(u\pm\sqrt{u^2-4v}\right).$$

Ide u és v összetartozó párjait behelyettesítve az első két pár alapján két-két megoldását kapjuk az eredeti rendszernek:

$u=2$, $v=-4{,}5$ mellett:	$x_1=3{,}345$,	$y_1=-1{,}345$;
	$x_2=-1{,}345$,	$y_2=3{,}345$;
$u=5$, $v=6$ mellett	$x_3=3$,	$y_3=2$;
	$x_4=2$,	$y_4=3$.

Az $u=-7$, $v=18$ értékpár nem ad valós x, y értékpárt. – Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzés. Könnyű felismerni, hogy a $(2,3)$ és $(3,2)$ egész számpárok kielégítik a rendszert. Erre támaszkodva grafikusan folytathatjuk a megoldást. (1)-nek az origó körül $r=\sqrt{13}$ sugárral írt kör pontjai tesznek eleget, (2)-nek a két tengelyen a $\left(\sqrt[3]{35}=3{,}271;0\right)$, illetve a $(0;3{,}271)$ pont, amelyek a kör belsejében vannak, hiszen $\sqrt{13}=3{,}605>3{,}271$.



Azt várjuk viszont, hogy a (2)-t ábrázoló vonal kilép a körből, hiszen $y = \sqrt[3]{35 - x^3}$ alapján minden valós x abszcisszán van (pontosan egy) pontja a vonalnak. Kilépési pontot valóban találunk $x = 3{,}3$ és $x = 3{,}4$ között – és az egyenletek szimmetriája alapján x és y felcserélésével a negyedik megoldás is kiadódik.

Így azonban csak abból mondhatjuk ki, hogy további megoldás nincs, hogy a (2)-t ábrázoló görbe monoton süllyed.