Egy szám akkor osztható 21-gyel, ha 3-mal és 7-tel is osztható. Vizsgáljuk tehát a $2^n+1 (n \geq 0)$ kifejezést először a 7-tel való oszthatóság szempontjából.

Írjuk fel n-t $(3k+r)$ alakban, ahol $r=0$, 1, 2, és az $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$ ismert azonosság felhasználásával alakítsuk át a kifejezést.

$$2^{3k}+1=(2^3)^k-1+2=7(8^{k-1}+8^{k-2}+\ldots+1)+2$$
$$2^{3k+1}+1=2\cdot 2^{3k}+1+2^{3k}-2^{3k}=3\cdot 2^{3k}-(2^{3k}-1)$$
$$2^{3k+2}+1=5\cdot 2^{3k}-(2^{3k}-1).$$

Mindhárom esetben az átalakítás után kapott kifejezés egyik tagja többszöröse 7-nek, a másik nem, tehát eredeti kifejezéseink egyike sem osztható 7-tel. További vizsgálatra nincs szükség, mivel 2 bármelyik kitevője felírható az előző alakok egyikeként.

Nincs tehát egyetlen olyan kitevő sem, amelyre 2^n+1 osztható lenne 7-tel, s így természetesen 21-gyel sem osztható.

Szilágyi Sándor (Törökszentmiklós, Bercsényi M. Gimn. III. o. t.)