$$2abcd-(abc+abd+acd+bcd) \tag{1}$$

I. megoldás. Alakítsuk át (1)-et a következőképpen:

$$2abcd-(abc+acd+abd+bcd)=abcd\left[2-\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right].$$

Az első tényező értéke akkor lesz a legkisebb, ha az 1, 3, 5, 7 számokat helyettesítjük a változók helyére valamilyen sorrendben. Azt állítjuk, hogy a betűk ilyen megválasztása esetén lesz a lehető legkisebb a szögletes zárójelben álló tényező értéke is. Ugyanis pozitív a, b, c, d számok reciprokainak az összege is pozitív, s ezt 2-ből levonva, akkor kapjuk a lehető legkisebb értéket, ha a reciprokok összege a legnagyobb, azaz ha a, b, c, d értékei a legkisebb páratlan számok.

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

II. megoldás. Az (1) kifejezésbe a változók helyébe a legkisebb pozitív számokat, 1, 3, 5, 7-et helyettesítve az eredmény

$$2\cdot 105-(15+21+35+105)=34>0.$$

Bármilyen, a feltételnek eleget tevő számnégyesből indulunk is ki, a számokat mindig kettővel csökkentve, különböző páratlan számok sorozatán át – elég sok lépés után – elérhetjük, hogy a legkisebb szám 1-re, a nagyság szerint következő 3-ra, a következő 5, illetve 7-re csökkenjen.

Elegendő tehát azt belátnunk, hogy a változók bármelyikét csökkentve a kifejezés értéke is csökken. Az (1) szimmetriája miatt mindegy, hogy melyik változót csökkentjük. Írjuk a helyébe a következő a-nál kisebb páratlan számot:

$$2(a-2)bcd-\big[(a-2)bc+(a-2)bd+(a-2)cd+bcd\big].$$

A változás:

$$N=4bcd-2bc-2bd-2cd.$$

Erről kell belátni, hogy pozitív. Tegyük fel, hogy a három szám közül b a legnagyobb, d a legkisebb: $b>c>d$. Ekkor:

$$\frac{1}{2}N=b(2cd-c-d)-cd>c(2cd-c-d)-cd,$$

elég tehát azt igazolni, hogy

$$2cd-c-d>d,$$

azaz

$$2d(c-1)>c,$$

ami valóban igaz, hiszen $d\geq 1$ miatt $2d(c-1)\geq 2c-2=c+(c-2)>c$, mert $c-2\geq d\geq 1$.

Ez más szóval azt jelenti, hogy (1) a legkisebb akkor lesz, ha a változók értéke a legkisebb, azaz 1, 3, 5 és 7.