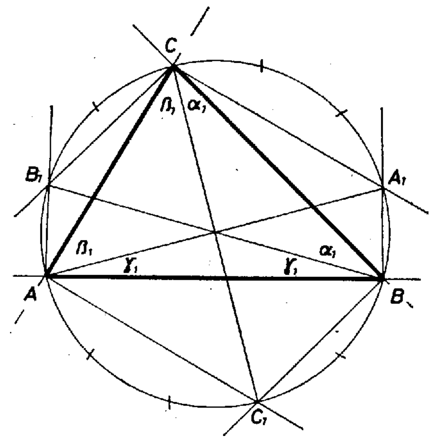
Állítsunk merőlegest az AB oldalra a végpontjaiban és jelöljük az A-ban emelt merőlegesnek a körrel való metszéspontját B_1-gyel, a B-ből kapott metszéspontot pedig A_1-gyel (1. ábra).



1. ábra

Így a (félkörnél kisebb) AB_1 és BA_1 ívek pontjainak – és csakis ezeknek – az AB egyenesen levő vetületei esnek az AB szakasz egyik vagy másik meghosszabbítására. Thalész-tétele alapján AA_1 és BB_1 a körnek átmérői és ezért $AB_1 = BA_1$.

Ugyanezt elvégezve a BC és a CA oldal esetében is, metszéspontként a C-ből induló átmérő C_1 végpontját, valamint ismét B_1-et, A_1-et kapjuk, és a BC egyenesen a félkörnél kisebb, egymással egyenlő BC_1 és CB_1 ívek, a CA-n pedig a $CA_1 = AC_1$ ívek pontjai adnak a meghosszabbításra eső vetületet. Jelöljük a kapott $\widehat{AB_1}$, $\widehat{BC_1}$, $\widehat{CA_1}$ körívhez tartozó kerületi szöget rendre γ_1-gyel, α_1-gyel, β_1-gyel; ezekkel és a kör sugarával kifejezhetjük egyrészt a kérdéses ívösszegeket:

$$\widehat{AB_1} + \widehat{BA_1} = 2\frac{2\pi r 2\gamma_1}{360°} = \frac{\pi r}{45°}\gamma_1, \tag{1}$$
$$\widehat{BC_1} + \widehat{CB_1} = \frac{\pi r}{45°}\alpha_1, \quad \widehat{CA_1} + \widehat{AC_1} = \frac{\pi r}{45°}\beta_1,$$

másrészt az ABC háromszög szögeit.

Ha az eredeti ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra), akkor az A_1, B_1, C_1 pont a körből rendre a BC, CA, AB oldal által lemetszett (félkörnél kisebb) íven van és az (1)-ben felsorolt hat ív hézagtalanul és átfedés nélkül kitölti a kör kerületét. Ezért egyrészt

$$\frac{\pi r}{45°}(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) = 2\pi r, \qquad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 90°,$$

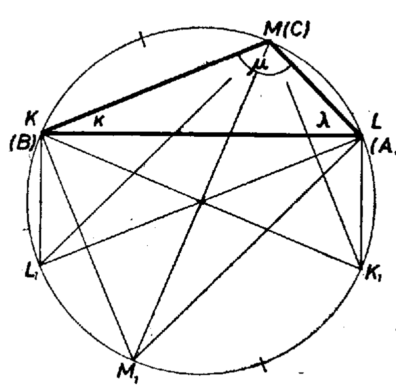
továbbá arányukra a közlés szerint

$$\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 1 : 2 : 3,$$

amiből $\gamma_1 = 15°$, $\alpha_1 = 30°$, $\beta_1 = 45°$, ezekből pedig háromszögünk szögei:

$$BAC\sphericalangle = \beta_1 + \gamma_1 = 60°, \qquad CBA\sphericalangle = \gamma_1 + \alpha_1 = 45°,$$
$$ACB\sphericalangle = \alpha_1 + \beta_1 = 75°.$$

2. Tekintsük most a kérdéses ívösszegeket egy tompaszögű KLM háromszögben, legyenek ennek szögei rendre κ, λ, μ, úgy, hogy $\mu > 90° > \lambda \geq \kappa$, és állapítsuk meg a (fentiekhez hasonlóan vett) $\widehat{KL_1} + \widehat{LK_1}$, $\widehat{LM_1} + \widehat{ML_1}$ és $\widehat{MK_1} + \widehat{KM_1}$ összegek nagyságviszonyát, hogy a K, L, M csúcsokat helyesen feleltethessük meg a kívánt A, B, C csúcsoknak (2. ábra).



2. ábra

Az M csúcsot nem tartalmazó $\widehat{KL}$ ív nagyobb félkörnél, ezen pontjainak sorrendje K, L_1, M_1, K_1, L, és az egymás utáni pontok közti ívek már mind kisebbek félkörnél.

Az ívek arányához elég lesz kifejeznünk a $\widehat{KL_1}$, az $\widehat{L_1M}$ és a $\widehat{KM_1}$ ívekre néző kerületi szögeket:

$$\begin{aligned} KML_1\sphericalangle &= KML\sphericalangle - L_1ML\sphericalangle = \mu - 90^\circ, \\ L_1LM\sphericalangle &= L_1LK\sphericalangle + KLM\sphericalangle = L_1MK\sphericalangle + \lambda = (\mu - 90^\circ) + \lambda = 90^\circ - \kappa, \\ KMM_1\sphericalangle &= 90^\circ - KM_1M\sphericalangle = 90^\circ - KLM\sphericalangle = 90^\circ - \lambda. \end{aligned}$$

Mivel $\kappa \le \lambda$, azért $L_1LM\sphericalangle \ge KMM_1\sphericalangle$, továbbá a KML_1 szög mindkettőjüknél kisebb, mert $\widehat{KL_1}$ az $\widehat{L_1M}$-nek is, a $\widehat{KM_1}$-nek is része. És mivel az $1:2:3$ arány tagjai különbözők, azért

$$\widehat{KL_1} : \widehat{KM_1} : \widehat{ML_1} = 1 : 2 : 3,$$

és a KL oldal szerepét AB-nek, KM-ét BC-nek és ML szerepét CA-nak kell átadnunk, azaz K, L, M szerepét rendre B-nek, A-nak, C-nek. Az arányokból egyrészt

$$\begin{gathered} 2\widehat{KL_1} = \widehat{KM_1} = \widehat{KL_1} + \widehat{L_1M_1} = \widehat{KL_1} + \widehat{LM}, \\ \widehat{KL_1} = \widehat{LM}, \qquad \mu - 90^\circ = \kappa; \end{gathered}$$

másrészt

$$3\widehat{KL_1} = \widehat{ML_1}, \qquad \widehat{MK} = 2\widehat{ML}, \qquad \lambda = 2\kappa,$$

Ezeket behelyettesítve

$$\begin{gathered} \kappa + \lambda + \mu = \kappa + 2\kappa + (90^\circ + \kappa) = 180^\circ, \\ \kappa = ABC\sphericalangle = 22{,}5^\circ, \qquad \lambda = BAC\sphericalangle = 45^\circ, \qquad \mu = ACB\sphericalangle = 112{,}5^\circ \end{gathered}$$

3. Mindezek szerint a partnerünk által alapul vett ABC háromszög egymás utáni szögei vagy 60°, 45°, 75°, vagy 45°, $22{,}5^\circ$, $112{,}5^\circ$. – Mondhatjuk ezt is: az A, B, C csúcs vagy egy szabályos 12-szögnek rendre az első, a hatodik, ill. a tizedik csúcsával azonos, vagy pedig egy szabályos 8-szögnek rendre az első, a hatodik, a nyolcadik csúcsával.

Megjegyzés. Derékszögű nem lehetett az ABC háromszög, mert akkor az átfogó egyenesén nem lenne a hosszabbításra eső vetületi pont, a megfelelő ív arányszám 0 lenne az adottaktól eltérően.