

Az a , b , c hosszúságú szakaszokból akkor lehet háromszöget szerkeszteni, ha

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a;$$

mindegyike fennáll.

Ahhoz, hogy az a' , b' , c' szakaszokból is szerkesztessünk háromszöget, teljesülniük kell az

$$(1) \quad a' + b' > c';$$

$$(2) \quad a' + c' > b';$$

$$(3) \quad b' + c' > a'$$

egyenlőtlenségeknek. Elég az egyiket belátni, a másik kettő ebből már következik a betűk ciklikus cseréjével.

Helyettesítsük (1)-be a' , b' , c' helyére a definiáló összefüggéseket, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} > \frac{c}{c+1}.$$

Mivel $(a+1)(b+1)(c+1) > 0$, az egyenlőtlenséget megszorozhatjuk vele:

$$\begin{aligned} a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) &> c(a+1)(b+1), \\ abc + ab + ac + a + abc + ab + bc + b &> abc + ac + bc + c, \\ abc + 2ab + a + b &> c. \end{aligned}$$

Ez viszont teljesül, ugyanis $a + b > c$, és $abc + 2ab > 0$.

Az állítás megfordítása nem igaz, azaz ha az a' , b' , c' szakaszokból szerkeszthető háromszög, akkor az a , b , c szakaszokból nem biztos, hogy szerkeszthető.

Legyen pl.

$$a' = \frac{3}{4}, \quad b' = \frac{3}{4}, \quad c' = \frac{9}{10},$$

akkor $a = 3$, $b = 3$, $c = 9$.

Az a' , b' , c' szakaszokból szerkeszthető háromszög, de $a + b < c$ miatt az a , b , c szakaszokból nem.