$$(1)\qquad \left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]=\frac{5x-4}{3}.$$

I. megoldás. A megoldáshoz felhasználjuk a következő összefüggést: $[a]=a-\{a\}$, ahol $\{a\}$ az a törtrészét jelenti, azaz $0\le\{a\}<1$.

Eszerint (1) így alakul:

$$\frac{2x-1}{3}-\left\{\frac{2x-1}{3}\right\}+\frac{4x+1}{6}-\left\{\frac{4x+1}{6}\right\}=\frac{5x-4}{3},$$

$$(2)\qquad \left\{\frac{2x-1}{3}\right\}+\left\{\frac{4x+1}{6}\right\}=\frac{7-2x}{6}.$$

Mivel $0\le\{a\}<1$, a (2) bal oldalán álló összeg 0 és 2 közé esik, így

$$0\le\frac{7-2x}{6}<2$$

is fennáll, ebből

$$-2{,}5<x\le 3{,}5.$$

A kapott x értéket (1) jobb oldalába helyettesítve:

$$(3)\qquad -5{,}5<\frac{5x-4}{3}<4{,}5.$$

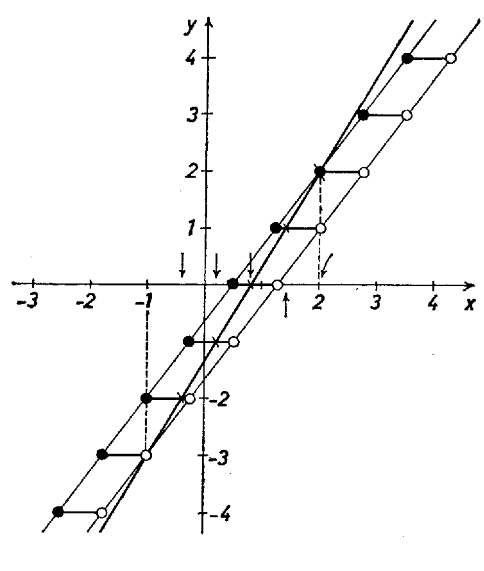
Mivel az (1) bal oldalán álló kifejezések mindegyike egész, ezért összegük is egész, azaz $\frac{5x-4}{3}=N$ egész. (3)-ból N értéke $-5{,}5$ és $4{,}5$ közé eső érték lehet. Írjuk fel táblázatban N szóba jövő értékeit, számítsuk ki a hozzájuk tartozó $x=\frac{3N+4}{5}$ értékeket, helyettesítsük ezeket az (1) bal oldalán álló kifejezésekbe. Összegüket egybevetve N-nel [ami (1) jobb oldalának megfelelő értéke] mindjárt kiolvashatjuk a táblázatból, hogy mikor áll fenn egyenlőség.

N	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	$-2{,}2$	$-1{,}6$	-1	$-0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}8$	$1{,}4$	2	$2{,}6$	$3{,}2$
$\left[\frac{2x-1}{3}\right]$	-2	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1	1
$\left[\frac{4x+1}{6}\right]$	-2	-1	-1	-1	0	0	1	1	1	2

Tehát az egyenlőség $x=-0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}8;\ 1{,}4;\ 2{,}0;$ értékekre teljesül.

Telek József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn. II. o. t.)

II. megoldás. Ábrázoljuk a $\left[\frac{2x-1}{3}\right]+\left[\frac{4x+1}{6}\right]$ és az $\frac{5x-4}{3}$ függvényeket.



Az egészrész függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos szakaszokból áll. Mindig egész y értéket vesz fel. A szakasz jobb oldali végpontja hozzátartozik a függvényhez, a bal oldali nem.

A grafikonról leolvashatjuk, hogy a két függvénynek közös pontja van az $y = 2$, $y = 1$, $y = 0$, $y = -1$, $y = -2$ függvények egy-egy szakaszán. A hozzájuk tartozó x értékeket pontosan meghatározhatjuk.

Ha $\frac{5x-4}{3} = 2$, akkor $x = 2$, és így tovább x-re a következő értékeket kapjuk: $x = 2$, $\frac{7}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{5}$.

Megjegyzés. Hasonló típusú egyenletek megoldásánál a grafikonról leolvashatjuk, hogy a megoldások száma attól függ, hányszor metszi át az adott egyenes az egészrész függvényt ábrázoló szakaszokat. A szakaszok végpontjai két párhuzamos egyenesen helyezkednek el. Nincs megoldás, ha az egyenletben megadott egyenes mindenütt a két párhuzamos közti sávon kívül halad. Végtelen sok megoldás van, ha az egyenes a sávon belül halad, nem párhuzamos az x tengellyel, vagy egybeesik valamelyik szakasszal.

III. Megoldás. Tekintsük új ismeretlennek az első szögletes zárójelben álló kifejezést:

(4) $$y = \frac{2x-1}{3},$$

erre az ismeretlenre (1) a

(5) $$[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2}$$

egyenletet jelenti. A bal oldalon álló szám $n \le y < n + \frac{1}{2}$ mellett (ahol n egész szám) $2n$-nel, $n + \frac{1}{2} \le y < (n+1)$ mellett $(2n+1)$-gyel egyenlő. Mindkét esetben egyenlő a bal oldal $[2y]$-vel, (5) tehát ekvivalens a

(6) $$[2y] = \frac{5y-1}{2}$$

egyenlettel. Ebből némi átalakítással a

$$2y - [2y] = \frac{1-y}{2}$$

egyenletet kapjuk. Itt a bal oldal értéke 0 és 1 közötti szám (0 lehet, de 1 nem), tehát a jobb oldalon álló kifejezés értéke is ilyen:

$$0 \le \frac{1-y}{2} < 1,$$
$$-1 < y \le 1.$$

Eszerint (6) bal oldalának lehetséges értékei: $[2y] = -2, -1, 0, 1, 2$, amiből (6), majd (4) alapján rendre

$$\begin{array}{lllll} y = -\frac{3}{5}; & -\frac{1}{5}; & \frac{1}{5}; & \frac{3}{5}; & 1, \\ x = -\frac{2}{5}; & \frac{1}{5}; & \frac{4}{5}; & \frac{7}{5}; & 2 \end{array}$$

adódik. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ezek mindegyike gyöke (1)-nek.