A háromszög egymás utáni szögei a feltételeknek megfelelően egy–egy x, y, z természetes számnak rendre a 7-szerese, 9-szerese, 11-szerese úgy, hogy

$$7x + 9y + 11z = 180. \tag{1}$$

Mivel e szögek mindegyike hegyesszög, kisebb 90°-nál, teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$1 \leqq x \leqq 12, \quad 1 \leqq y \leqq 9, \qquad 1 \leqq z \leqq 8. \tag{2}$$

Átrendezve (1)-et:

$$9(x + y + z) = 180 + 2(x - z). \tag{3}$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala osztható 9-cel, ezért a jobb oldalon $(x - z)$ is osztható vele, ami csak akkor teljesül a (2) feltételek miatt, ha $x - z = 0$, vagy ha $x - z = 9$. Ezt a két lehetőséget külön vizsgáljuk.

a) Ha $x - z = 0$, akkor $z = x$, és így (2) miatt $x \leqq 8$, másrészt (3)-ból és ismét (2) miatt

$$y = 20 - 2x \leqq 9, \quad x \geqq 6.$$

Így a következő három lehetőség adódik:

$$\begin{aligned} x = z = 6, &\quad 7, \quad 8, \\ y = 8, &\quad 6, \quad 4, \end{aligned}$$

a megfelelő szögértékek:

$$\begin{aligned} 7x = 56, &\quad 49, \quad 42, \\ 9y = 36, &\quad 54, \quad 72, \\ 11z = 88, &\quad 77, \quad 66. \end{aligned}$$

Innen tehát 3 megoldást kaptunk.

b) Ha pedig $x - z = 9$, akkor $z = x - 9$, a (3), majd (2) alapján $2x + y = 31$ és $x \geqq 11$, az ennek megfelelő értékhármasok:

$$\begin{aligned} x = 12, &\qquad 11 \\ z = x - 9 = \ \ 3, &\qquad \ \ 2, \\ \text{és ekkor } y = \ \ 7, &\qquad \ \ 9, \end{aligned}$$

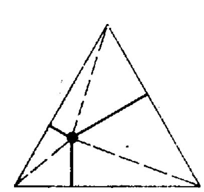
és a lehetséges szögértékek:

$$\begin{aligned} 7x = 84, &\quad \text{ill.} \quad 77 \\ 9y = 63, &\quad \text{ill.} \quad 81 \text{ és} \\ 11z = 33, &\quad \text{ill.} \quad 22. \end{aligned}$$

Mindezek szerint a feltételnek 5 háromszög tesz eleget, s ezek szögei:

$$\begin{aligned} \alpha = 42°, &\quad 49°, \quad 56°, \quad 77°, \quad 84°, \\ \beta = 72°, &\quad 54°, \quad 36°, \quad 81°, \quad 63°, \\ \gamma = 66°, &\quad 77°, \quad 88°, \quad 22°, \quad 33°, \end{aligned}$$

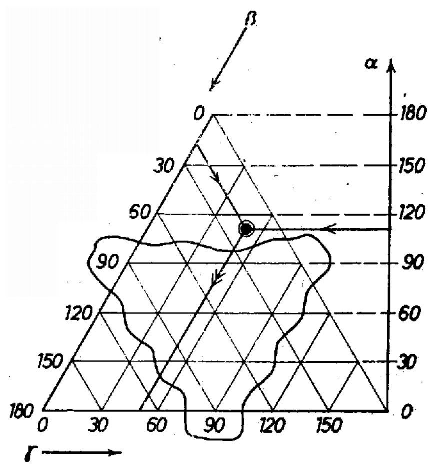
Megjegyzések. Bemutatjuk a feladatnak egyféle grafikus próbálkozáson alapuló megoldását. Felhasználjuk az egyenlő oldalú háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy bármely belső vagy kerületi pontjára nézve a három oldaltól mért távolságok összege állandó, egyenlő a háromszög magasságával (l. ábra, bizonyítását az olvasóra hagyjuk).



1. ábra

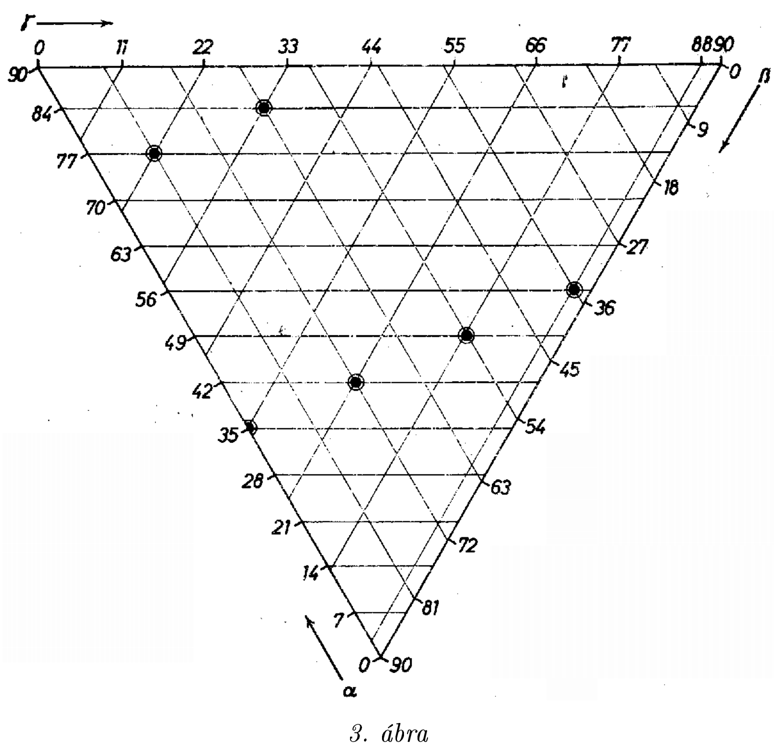
Ennek megfordításával ugyanis minden olyan x, y, z nemnegatív számokból álló számhármashoz, melyben $x+y+z=s$, állandó, az s magasságú egyenlő oldalú háromszögben egyértelműen hozzárendelhető egy pont, pontosabban akkor, ha még azt is előírjuk, hogy az x, y, z távolságot a háromszögnek rendre melyik oldalától mérjük.

A gyakorlat céljára ennek alapján úgynevezett „számoló" (számítást pótló) ábrát lehet szerkeszteni úgy, hogy a háromszögben már előre mindegyik oldalegyenestől $1, 2, \ldots$, (vagy $10, 20, \ldots$) egységnyi távolságban párhuzamosakat húzunk. Ezután – föltéve, hogy ismerjük x és y értékét – megkeressük azt a pontot, ahol az első oldaltól x, és a második oldaltól y távolságban húzott egyenes metszi egymást, és leolvassuk a harmadik oldallal párhuzamos egyenesek skálaértékei alapján a pontnak a harmadik oldaltól való távolságát, ez az adott x-et és y-t s-re kiegészítő z érték. x-et és y-t a grafikonba bevinni, illetőleg z-t onnan kiolvasni, bizonyos pontossággal lehet az ábra nagyságának és a hálózat sűrűségének megfelelően, mint bármely grafikonban. A 2. ábrán $s=180^\circ$ és a megjelölt pontban az $\alpha=110^\circ$, $\beta=20^\circ$ értékpárhoz $\gamma=50^\circ$ adódik. – Az ilyen ábrákat *háromszög nomogram*nak nevezik. A skálákat a háromszög oldalaira is lehet fölírni.



2. ábra

Rátérve feladatunkra, mivel háromszögünk szögei hegyesszögek, elég megtartani a 2. ábrából a középháromszöget (hullámosan körülkerítve), és ennek magasságát 90 egységnek, foknak megfeleltetni. Az így szerkesztett 3. ábrán az egyik oldallal párhuzamosan csak azokat az egyeneseket húzzuk meg, amelyek a csonkítatlan háromszög oldalegyeneseitől akkora távolságban vannak, mint az új háromszög magasságának $\frac{7}{90}$, $\frac{14}{90}$, $\ldots$, $\frac{84}{90}$ része, a másik oldaltól $\frac{9}{90}$, $\frac{18}{90}$, $\ldots$, $\frac{81}{90}$ része és a harmadiktól $\frac{11}{90}$, $\frac{22}{90}$, $\ldots$, $\frac{88}{90}$ része.



3. ábra

Továbbá megkeressük az olyan pontokat – ha vannak –, amelyeken 3 berajzolt egyenes megy át, és kellő ellenőrzés után ezek a feladat megoldásai.

Az érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk az így talált 5 pont (és a kerületen levő, derékszögű háromszöget jelentő pont) kölcsönös helyzetében mutatkozó szabályszerűség kimondását, valamint felhasználását a három oszthatósági feltételt kielégítő *tompaszögű* megoldások kiolvasására.