I. megoldás. A 2^n hatvány végződései $n>3$ esetén rendre $6,\ 2,\ 4,\ 8,\ 6,\ 2,\ \ldots$. Ehhez belátjuk, hogy 2^{n+4} minden n-re ugyanarra a jegyre végződik, mint 2^n:

$$2^{n+4}=2^n\cdot 2^4=2^n\cdot 16.$$

A szorzat utolsó jegye a tényezők utolsó jegyétől függ csak. A 2^n utolsó jegye mindig páros, s ha a $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ számokat 6-tal szarozzuk, a szorzat ugyanarra a számjegyre végződik, mint maga a szám. Ezzel állításunkat igazoltuk.

Ha $n=4k$, akkor 2^n utolsó jegye 6, tehát a feladat állítása helyes.

Ha $n=4k+i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ alakú, 2^n utolsó jegye 2^i, tehát a feladat állítása azt jelenti, hogy

$$\frac{2^i(2^n-2^i)}{10}\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

osztható 6-tal.

Elég belátni, hogy 2^n-2^i többszöröse 3-nak, hiszen már tudjuk, hogy

$$\frac{2^n-2^i}{10}$$

egész szám.

$$2^n-2^i=2^{4k+i}-2^i=2^i(2^{4k}-1)=2^i\big((2^4)^k-1\big),$$

s mivel (a^n-b^n) mindig osztható az alapok különbségével, $(2^4)^k-1$ mindig osztható 15-tel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha k tetszőleges természetes szám, akkor $2^{4k}=10A+6$, ahol A-t 3-mal osztva 1-et kapunk maradékul, és $2^{4k+1}=10B+2$, $2^{4k+2}=10C+4$, $2^{4k+3}=10D+8$, ahol B, C, D osztható 3-mal. Könnyen látható, hogy a feladat állítása ebből már következik. Ha $k=1$,

$$2^{4k}=16,\quad 2^{4k+1}=32,\quad 2^{4k+2}=64,\quad 2^{4k+3}=128,$$

tehát állításaink helyesek. Tegyük fel, hogy már beláttuk azokat valamilyen természetes k-ra, és legyen $m=k+1$. Akkor

$$2^{4m}=2\cdot 2^{4k+3}=2(10D+8)=10(2D+1)+6,$$

ahol D a már bizonyított állítás szerint osztható 3-mal. Ez viszont épp azt jelenti, hogy$2^{4m}=10A_1+6$ alakú, ahol A_1-et 3-mal osztva 1-et kapunk maradékul. Továbbmenve kapjuk, hogy

$$2^{4m+1}=2\cdot 2^{4m}=2(10A_1+6)=10\cdot(2A_1+1)+2,$$

tehát $2^{4m+1}=10B_1+2$, ahol B_1 osztható 3-mal, hiszen $2A_1$-et 3-mal osztva már 2-t kapunk maradékul. Ennek alapján

$$2^{4m+2}=2\cdot 2^{4m+1}=2(10B_1+2)=10C_1+4,$$

ahol $C_1=2B_1$, tehát C_1 is osztható 3-mal, és

$$2^{4m+3}=2\cdot 2^{4m+2}=2(10C_1+4)=10D_1+8,$$

ahol $D_1=2C_1$, tehát D_1 is osztható 3-mal. Záródott a kör, összes állításunkat beláttuk m-re, és ezzel egyben minden természetes számra is beláttuk azt.