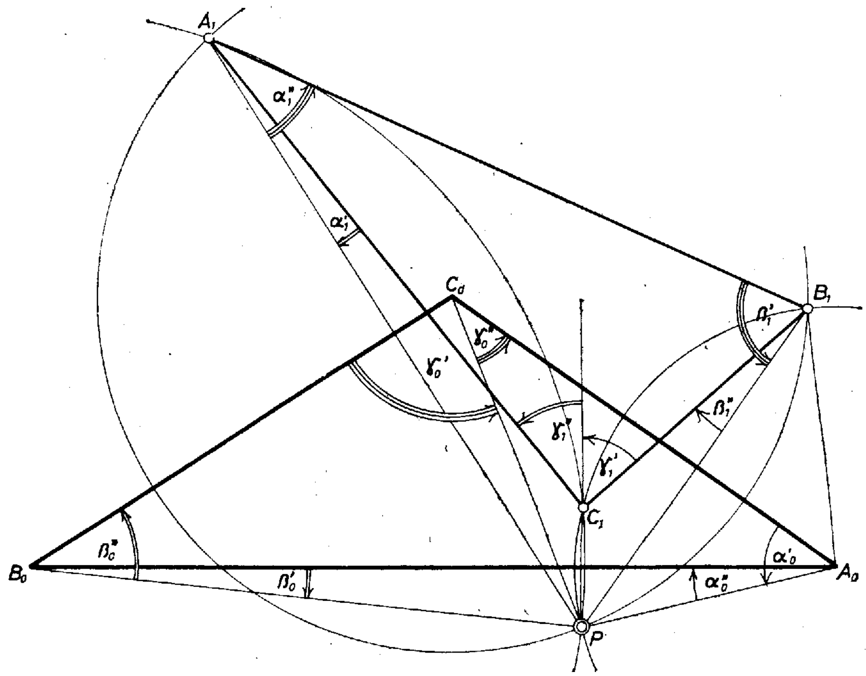
Módosítsuk a képezési utasítást úgy, hogy P-t vetítés helyett tükrözzük a megfelelő oldalra. Így kétszer akkora háromszöget kapunk, mint eredetileg, s mivel az eredeti transzformáció és e módosítottja hasonló háromszögre vezet, azért elegendő lesz a feladat állítását a módosított transzformációra bizonyítani.

Jelöljük a C_nA_n egyenest a PA_n egyenesbe vivő forgatást α_n'-vel, a PA_n-et B_nA_n-be vivőt α_n''-vel, és tovább az A_nB_nP, PB_nC_n, B_nC_nP és PC_nA_n forgásszöget rendre β_n'-vel, β_n''-vel, γ_n'-vel, γ_n''-vel.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy a H_{n+1}-beli megfelelő forgásszögekre fennállanak a következő egyenlőségek

$$\begin{aligned} &\alpha_{n+1}' = \beta_n', \quad \beta_{n+1}' = \gamma_n', \quad \gamma_{n+1}' = \alpha_n', \\ &\alpha_{n+1}'' = \gamma_n'', \quad \beta_{n+1}' = \alpha_n'', \quad \gamma_{n+1}' = \beta_n'', \end{aligned} \tag{1}$$

Ezekből következik majd, hogy

$$\alpha_3' = \beta_2' = \gamma_1' = \alpha_0', \qquad \beta_3' = \gamma_2' = \alpha_1' = \beta_0', \qquad \gamma_3' = \alpha_2' = \beta_1' = \gamma_0',$$

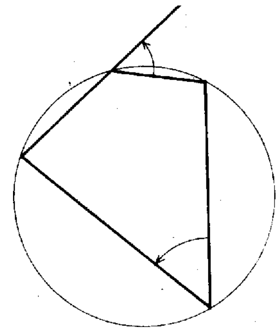
és hasonlóan

$$\alpha_3'' = \alpha_0'', \qquad \beta_3'' = \beta_0'', \qquad \gamma_3'' = \gamma_0'',$$

tehát H_3 és H_0 megfelelő szögei egyenlők, így valóban hasonlók.

Tekintsük az A_n, B_n, C_n pontok köré írt, P-n átmenő köröket (1. ábra). E körök rendre átmennek P-nek a körpárok centrálisaira vonatkozó tükörképein, a H_{n+1} háromszög megfelelő csúcsain. A tükrözés miatt a $B_{n+1}A_n$-et A_nP-be vivő forgatás egyenlő $2\alpha_n'$-vel. Emiatt egyenlők α_n'-vel az A_n körüli, P-n átmenő körnek a $B_{n+1}P$ ív feletti kerületi szögei, köztük a $C_{n+1}B_{n+1}$-et PC_{n+1}-be vivő forgatás is, vagyis $\gamma_{n+1}' = \alpha_n'$; hasonlóan láthatjuk be (1) többi állításait is.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy két egyenes forgásszöge nincs egyértelműen meghatározva: ha a φ szögű forgatás e-t f-be viszi, akkor ugyanezt teszi a $(180° - \varphi)$ szögű forgatás is; emiatt a fenti bizonyítás kiegészítésre szorul. A bizonyított (1) egyenlőségek úgy igazak, hogy a lehetséges választások közt van olyan is, amelyikre teljesül (1). Így igaz a kerületi szögek egyenlőségére felhasznált állítás is. A szokásos értelmezés mellett ugyanis meg kell különböztetni azt az esetet, amikor a kerületi szög csúcsa a meghatározó íven van, attól, amikor a csúcs a kiegészítő íven van. Ez elkerülhető a forgásszögek alkalmazásával: a 2. ábrán látható kerületi forgásszögek egyenlők, noha csúcsaik egymást (teljes körré) kiegészítő íveken vannak.



2. ábra

Ennek az egyöntetűségnek azonban ára van: (1) felhasználásával csak azt bizonyítjuk be, hogy H_3 és H_0 megfelelően választott forgásszögei egyenlők, azaz ha a szögeket (a közönséges értelemben vett szögeket, nem forgásszögeket) rendre α_0, β_0, γ_0, α_3, β_3, γ_3 jelöli, akkor az α_0, α_3; β_0, β_3; γ_0, γ_3 párok tagjai vagy egyenlők vagy 180°-ra egészítik ki egymást.

A fellépő bizonytalanság, eloszlatásának az érdekében csak azt kell felhasználnunk, hogy a háromszög szögeinek összege 180°. Ha ugyanis a megfelelő szögek között volna egy, amelyik 180°-ra egészítené ki a párját – mondjuk $\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_0$ volna, akkor H_3-ban a szögek összege nem lehetne 180°:

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + \beta_0 + \gamma_0 = 360^\circ - 2\alpha_0,$$

ami csak úgy lehet 180°, ha $\alpha_0 = 90^\circ$, azaz ha α_3 egyenlő α_0-lal is. Ha két ilyen pár volna: $\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_0$ és $\beta_3 = 180^\circ - \beta_0$, akkor

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + (180^\circ - \beta_0) + \gamma_0 = 180^\circ + 2\gamma_0,$$

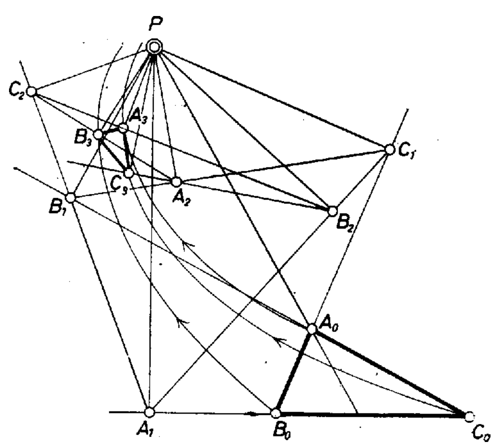
ami nem lehet 180°-kal egyenlő; ha pedig három ilyen volna, akkor:

$$\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = (180^\circ - \alpha_0) + (180^\circ - \beta_0) + (180^\circ - \gamma_0) = 360^\circ,$$

ami ismét nem 180°. Az állítást ezzel bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A legutóbbiakban egy kicsit többet is bizonyítottunk: mivel a forgásszögek is egyenlőek, azért azt is beláttuk, hogy H_3 körüljárása megegyezik H_0. körüljárásával.

Ilyenkor mindig van olyan forgatva nyújtás (kicsinyítés), amely H_0-t átviszi H_3-ba (a szög lehet természetesen 180° is), itt azonban még azt is be lehet látni, hogy ennek a transzformációnak a centruma éppen a P pont, vagyis hogy a P, A_0, B_0, C_0 és a P, A_3, B_3, C_3 pontrendszerek is hasonlók.



3. ábra

(Ilyet mutat az eredeti képezésmód mellett a 3. ábra; a sejtéshez eljuttat néhány pontosan végrehajtott szerkesztés más-más kiindulási helyzetből, a bizonyításra itt nem térünk ki.)