Egy egyjegyű, egy kétjegyű és egy háromjegyű természetes számot kell meghatároznunk a következők alapján.

(1) *A kétjegyű szám páros, a másik kettő páratlan.*

(2) *Ha a számokat összeszorozzuk, a szorzat vége 68, ez előtt a három szám összege áll, ami négyzetszám.*

(3) *Ha a háromjegyűnek a százas helyi értékű számjegyét átírjuk a kétjegyű elé, akkor az új háromjegyű szám is és a maradó kétjegyű is négyzetszám.*

Megoldás. Legyen a számok tízes számrendszerbeli alakja rendre A, BC, DEF, tehát A, B, D egyike sem 0.

(2) alapján az utolsó jegyek $A \cdot C \cdot F$ szorzata 8-asra végződik, azaz nem osztható 5-tel, egyik tényezője sem, így az (1) szerint páros C jegy nem 0, a páratlan A és F jegy nem 5-ös, és A az 1, 3, 7 és 9 valamelyike.

C-t és F-et tovább korlátozza, hogy ezek a (3) szerint négyzetvégződések. Ezért C csak a 4 és 6 jegyek valamelyike lehet, és F az 1 és 9 valamelyike.

Ha $C=4$, akkor (2) és (1) alapján a páratlan $A \cdot F$ szorzat végződése 7-es, amit $F=1$ mellett csak $A=7$ teljesít, $F=9$ mellett pedig csak $A=3$. Az előbbi értékhármast azonban kizárja, hogy (2) szerint a keresett számok s összege is négyzetszám, így ugyanis nem végződhet az $A+C+F=7+4+1$-ből adódó 2-esre. A $C=4$, $F=9$, $A=3$ értékhármasból viszont 6-ra végződik az összeg, ez még tovább vizsgálandó.

Hasonlóan $C=6$ mellett $A \cdot F$ végződése 3, az $F=1$, $A=3$ próbával $3+6+1$ a négyzet végén lehetséges 0-t adja, viszont $F=9$, $A=7$ mellett ismét a meg nem engedett 2 állna ott, ez nem jön szóba.

Mindkét lehetségesnek ígérkező esetben $A=3$, és a három szám összeadásának sémájából eddig a következőket ismerjük:

$$a)\quad \begin{array}{r} 3 \\ B4 \\ \underline{DE9} \\ s=\ ..6 \end{array} \qquad\qquad b)\quad \begin{array}{r} 3 \\ B6 \\ \underline{DE1} \\ s=\ ..0 \end{array}$$

A b) sémában s utolsó előtti jegye is 0, ezért ilyen megoldásban csak $B+E==9$ lehet és s-ben a százasok száma $D+1$. Másrészt $s<1000+100+10$, így értékére csak 400 és 900 jön szóba. Az utóbbit az zárja ki, hagy a keresett számok szorzata $100\,s+68$ és 90068 nem osztható $A=3$-mal, az előbbi pedig $D=3$-ra vezet, és így a (3) szerint képezett $DBC=3B6$ szám nem négyzetszám. Innen tehát nem kapunk megoldást. – Okoskodhatunk így is:

A b) sémában – mivel s négyzetszám – az utolsó előtti jegy is 0, így $B+E=9$. A (3) szerinti $DBC=DB6$ négyzetszámra 4 lehetőség van: $14^2=196$, $16^2=256$, $24^2=576$ és $26^2=676$, azaz B szóba jövő értékei: 9, 5, 7, 7, ebből E értékei rendre: 0, 4, 2, 2. Közülük csak $E=0$ mellett teljesül, hogy a maradó két jegy négyzetszámot ad: $EF=01$, ez is csak tágabb értelemben, de ekkor $s=200$, és ez nem négyzetszám; innen tehát nem kapunk megoldást.

Az a) sémában (3) szerint $DBC=DB4$ háromjegyű négyzetszám, tehát a $12^2=144$, $18^2=324$, $22^2=484$ és $28^2=784$ valamelyike, és B a 4, 2 és 8 jegyek valamelyike. Ámde (2) szerint

$$A \cdot BC \cdot DEF = 68+100(A+BC+DEF) > 100 \cdot DEF$$
$$A \cdot BC = 3(10B+4) > 100, \quad B \geqq 3,$$

tehát $B \neq 2$. Kiesik a $B=8$ érték is, ami mellett $D \geqq 4$, mert így a szorzatra kétféleképpen adódó

$$3 \cdot 84 \cdot DE9 = 25\,200D + 2520E + 2268$$
$$100s+68 = 10\,000D + 1000E + 9668$$

értékek különbözete

$$15\,200D + 1520E - 7400 > 7600(D-1) > 0.$$

A maradó $DBC=144$, azaz $B=4$, $D=1$ mellett az

$$A \cdot BC \cdot DEF = 3 \cdot 44 \cdot 1E9 = 100(3+44+10E+109)+68$$

egyenletből $E=4$. Ezzel megoldását kaptuk a feladatnak, mert egyrészt $E=4$ számjegy, másrészt vele $EF=49$ négyzetszám, harmadrészt, mert a három szám 196-os összege is négyzetszám.

Tehát a keresett számok: 3, 44 és 149; más megoldása nincs a feladatnak.

Megjegyzés. Az EF szám négyzetszám voltát csak F jegyében használtuk föl, hasonlóan az a) sémában s-nek is csak az utolsó jegyét vettük tekintetbe, amiatt volt szükség az utolsó ellenőrzésre.