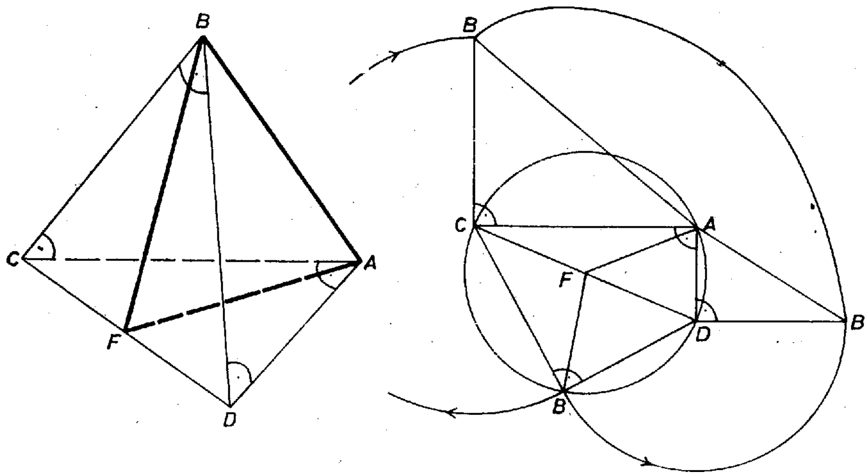
I. megoldás. Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy van olyan tetraéder, amelyben minden csúcsnál van derékszög.

Legyen $ABCD$ egy ilyen tetraéder, és válasszuk a betűzést úgy, hogy AB legyen az (egyik) leghosszabb él. E választás miatt az ABC, ABD háromszögekben AB-vel szemben van a legnagyobb szög, tehát a C-nél levő élszögek közül az ABC háromszögbeli szög a derékszög, a D-nél levők közül pedig az ABD-beli. (Minden háromszögben csak egy derékszög lehet.) Így ezeknek a háromszögeknek A-nál hegyesszögük van, az A-nál levő derékszög csak az ACD háromszögben lehet. Ugyanígy kapjuk, hogy a B-nél levő derékszög a BCD háromszögnek szöge.



1. ábra

Jelöljük a CD szakasz felezőpontját F-fel. Thalész tétele szerint az AF, BF szakaszok egyenlők a CD átfogó felével. Mivel az AB, CD egyeneseknek nincs közös pontjuk, az A, B, F pontok valódi háromszöget határoznak meg, és ebben

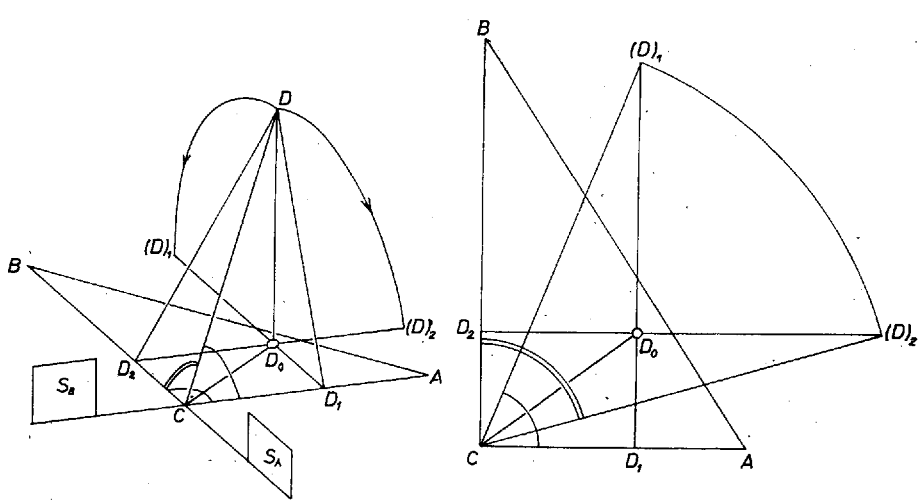
$$AB < AF + FB = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}CD = CD$$

(az 1. ábra a gondolt gúlát és kiterítését vázolja). Ellentmondásra jutottunk, hiszen betűzésünk szerint a tetraédernek nincs AB-nél hosszabb éle. – Feladatunk állítását ezzel bebizonyítottuk.

II. megoldás.

Tegyük ismét fel, hogy $ABCD$ olyan tetraéder, amelyben minden lap derékszögű és minden csúcsnál van derékszög. Egyelőre csak a C-ben összefutó élek közti szögeket tekintjük, válasszuk úgy a betűzést, hogy C-ben az ACB szög legyen 90°-os. Mivel minden lap derékszögű háromszög, a tetraéder lapjain nincsenek tompaszögek. Emiatt a C-nél levő ACD és BCD szögek hegyesszögek, a D csúcs a C-ben CA-ra emelt merőleges S_A síknak A-t tartalmazó oldalán, és a C-ben a CB-re emelt merőleges S_B síknak B-t tartalmazó oldalán van. Ezek szerint D-nek az ABC síkon levő D_0 a vetülete benne van ACB szögtartományban.

Vetítsük D_0-t az AC, BC egyenesekre és jelöljük a vetületet rendre D_1-gyel, D_2-vel. A $D_0D_1CD_2$ négyszögben három 90°-os szög van, ez tehát téglalap (2. ábra).



2. ábra

A CD_1D_0 és CD_1D háromszögek derékszögűek, bennük CD_1 közös és $DD_1 > D_0D_1$. Emiatt $DCD_1\sphericalangle > D_0CD_1\sphericalangle$. Hasonlóan kapjuk, hogy $DCD_2\sphericalangle > D_0CD_2\sphericalangle$, és e kettő összege szerint $ACD\sphericalangle + BCD\sphericalangle = D_1CD\sphericalangle + D_2CD\sphericalangle > D_1CD_0\sphericalangle + D_2CD_0\sphericalangle = 90°$, tehát a C-nél levő hegyesszögek összege nagyobb $90°$-nál.

Amit C-re kaptunk, érvényes a tetraéder további három csúcsára is, a bennük találkozó hegyesszögek összege is több $90°$-nál. Így viszont a négy lapon levő 8 hegyesszög összege $360°$-nál több volna, ami nem lehet, hiszen egy-egy lapon az összegük $90°$.

A kívánt tetraéder tehát nem létezik.