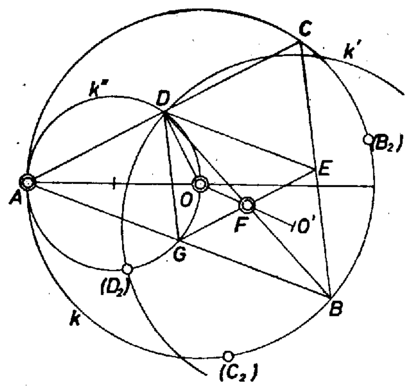
1. Jelöljük a keresett háromszög AC, CB, BA oldalának felezőpontját rendre D, E, G betűvel. Így az adott F pont a DEG közép háromszög EG oldalát felezi, ami egyben átlója a $BEDG$ paralelogrammának, ezért felezi a BD átlót is, tehát D a B csúcs tükörképe F-re.

Evvel egy mértani helyet kaptunk D-re, hiszen B rajta lesz az O körüli, OA sugarú körön, ezért D rajta lesz a körnek F-re való tükörképén.

Másrészt D az O-ból AC-re bocsátott merőleges talppontja, OAD derékszögű háromszög, tehát D rajta van az OA szakasz mint átmérő fölötti Thalész-körön is. E két megállapítás alapján megszerkeszthető D, és tovább a B és C csúcs.

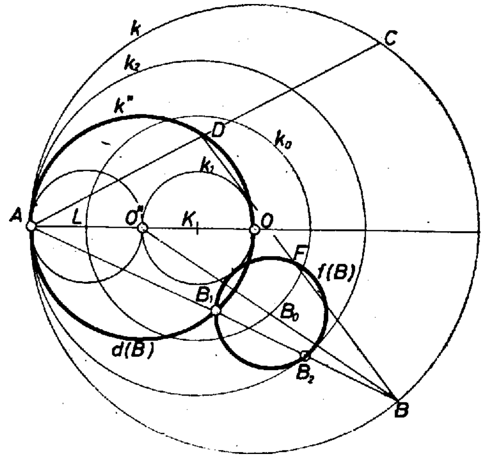


1. ábra

2. A szerkesztés menete: megrajzoljuk O körül az A-n átmenő k kört, majd ennek F-re való k' tükörképét és az OA sugár fölötti k'' Thalész-kört; ekkor k' és k'' közös pontja D; ezután B-t a DF egyenes, C-t pedig DA metszi ki k-ból.

3. Az így kapott ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert egyrészt körülírt körének középpontja valóban O, másrészt $OD \perp AD$ alapján D felezi az AC húrt, így a BD szakasz a háromszögnek súlyvonala, továbbá mivel B és D tükrösek F-re, azért e centrum felezi BD-t; megrajzolva az ABC háromszög AC-vel párhuzamos és egyirányú GE középvonalát, ez átlója a $BDGE$ paralelogrammának, tehát áthalad F-en és $FE = FG$.

4. Rátérve a megoldhatóság kérdésére, vizsgáljuk meg, hogy rögzített A és O mellett mi a szóba jövő F pontok mértani helye. Már beláttuk, hogy D mértani helye a k'' kör, jelöljük ennek a középpontját O''-vel. Pontosabban mondva a mértani hely az a halmaz, amit úgy kapunk, hogy az A pontot kivettük k''-ből, jelöljük ezt a„pont-híja kört” d-vel. Mivel F a BD szakasz felezőpontja, d-ből úgy kapjuk meg F keresett mértani helyének pontjait, ha d-t a k-nak tetszőleges – de A-tól különböző – B pontjából felére zsugorítjuk.

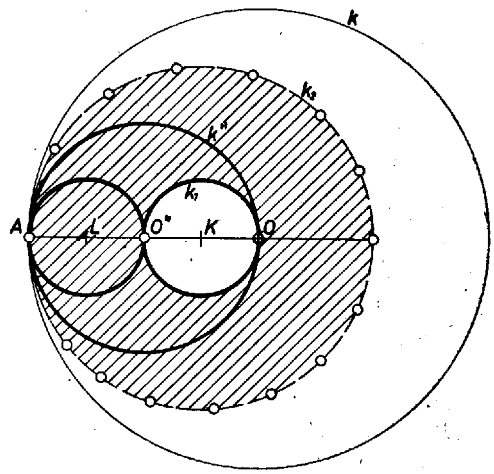


2. ábra

E zsugorítás közben azonban figyelembe kell vennünk, hogy D nem lehet rajta az AB egyenesen (hiszen AC-nek pontja), emiatt a zsugorítás előtt még el kel hagynunk d-ből annak az AB egyenesen levő B_1 pontját, és az igy kapott„két-pont-híja kört” kell felére zsugorítanunk B-ből. Jelöljük a d-ből B_1 elhagyása után visszamaradó halmazt $d(B)$-vel, vagyis $d(B)$ a k'' körnek az A és B_1 pontok által határolt két körívéből áll a végpontok nélkül. Ha k''-t a k-nak tetszőleges, A-tól különböző B pontjából felére zsugorítjuk, olyan kört kapunk, amelynek középpontja a BO'' szakasz felezőpontja, B_0, és sugara $r/4$, ahol r a k sugarát jelöli. Mivel B_1 felezi az AB szakaszt, a zsugorítás A-t B_1-be viszi, B_1-et pedig az AB szakasz B-hez közelebbi negyedelő pontjába, B_2-be.

Ha B bejárja k-nak A-tól különböző pontjait, B_0 és B_2 egy-egy kört járnak be, ezek közös K középpontja az OO'' szakasz felezőpontja, és sugara $r/2$, illetve $3r/4$. Pontosabban fogalmazva B_0B_2 mértani helyét úgy kapjuk, hogy e körökből – jelöljük őket k_0-lal és k_2-vel – elhagyjuk az AK szakaszon levő pontjaikat, az AO'' szakasz felezőpontját, L-et, illetve A-t. A teljes $d(B)$ halmaznak a B centrumú zsugorítás által adott képe az az $f(B)$ halmaz, amelyet úgy kapunk a B_0 körüli, $r/4$ sugarú körből, hogy elhagyjuk belőle a B_1, B_2 pontokat. Kérdés, mit súrol ki az $f(B)$ halmaz, ha B bejárja az,, A-híja-k-t”.

A k_0 pontjai körül $r/4$ sugárral írt körök azt a körgyűrűt súrolják ki, amelyet a K körüli $r/4$ sugarú k_1 kör és a k_2 körök határolnak. A körgyűrű tetszőleges belső pontján át két kör megy át közülük, a k_1, k_2 kör pontjain át pedig egy-egy. Mivel az $f(B)$ halmazhoz B_1 és B_2 nem tartozik hozzá, azért k_2 nem tartozik a keresett mértani helyhez, k'' pontjai pedig csak „egyszeresen” tartoznak hozzá, ami azt jelenti, hogy míg a körgyűrű tetszőleges belső F pontjából kiindulva két megoldást kapunk, addig a k'' kör pontjaihoz csak egy megoldás tartozik, az O ponthoz pedig egyetlen egy sem. Ugyancsak egyszeresen vannak lefedve az L körüli $r/4$ sugarú kör pontjai, az O'' ponthoz pedig nem tartozik megoldás, hiszen B nem lehet azonos A-val (3. ábra, a nullkörök kizárt pontokat jelölnek).



3. ábra

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni néhány speciális eredmény feltételét.
$BAC\sphericalangle = 90^\circ$ akkor adódik – egyetlen megoldásként –, ha F a k_1-nak (0-tól és O''-től különböző) pontja. $ABC\sphericalangle = 90^\circ$ akkor áll be – egyik megoldásként –, ha F-et az O körüli $r/2$ sugarú körön választjuk meg (kivéve belőle persze O''-t, valamint a k_2-re eső pontját). Végül $ACB\sphericalangle = 90^\circ$ akkor adódik – egyik megoldásként –, ha B a k-ban az A-val átellenes pont, tehát ha F a k_1-nek O-ra való tükörképén van (kivéve belőle persze O-t, valamint a k_2-n levő pontját).