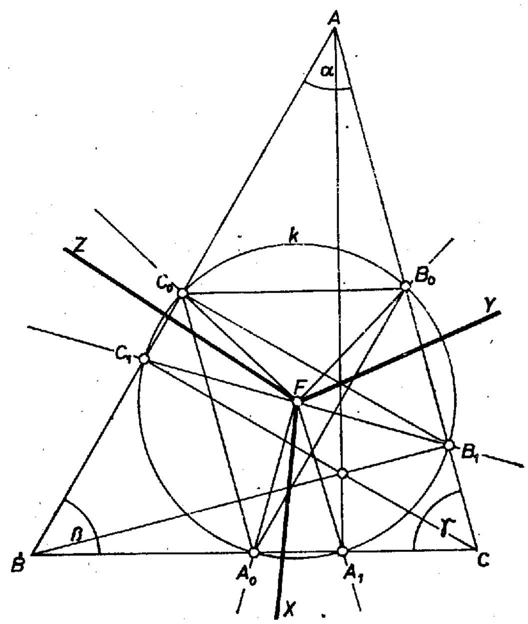
Tekintsük az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt k kört. Azt állítjuk hogy az A_1, B_1, C_1 pontok mindegyike rajta van k-n. A magasságtalppontok egyenrangú szerepéből következik, hogy elegendő az állítást egyik pont esetében igazolni. Legyen ez a pont B_1.



Az $A_0B_0C_0$ háromszög oldalai az ABC háromszög középvonalai, így a két háromszög hasonló és a szokásos jelölés szerint $C_0A_0B_0\sphericalangle = CAB\sphericalangle = \alpha$, $A_0B_0C_0\sphericalangle = \beta$, $B_0C_0A_0\sphericalangle = \gamma$, továbbá $A_0B_0 = \dfrac{1}{2}\,AB = C_0A$. Az ABB_1 derékszögű háromszögben $C_0A = C_0B_1$, (az átfogó Thalész–körének sugara), és így $A_0B_0 = C_0B_1$ is fennáll. Mivel még B_0B_1 párhuzamos A_0C_0-lal, azért az $A_0B_0B_1C_0$ négyszög szimmetrikus trapéz, azaz írható köréje kör, és ennek középpontja F; állításunkat bebizonyítottuk.

Nem használtuk fel a B_0, B_1 pontoknak olyan tulajdonságát, amely megkülönböztetné őket az A_0, A_1 és C_0, C_1 pontpártól, sem feladatunk szögadatait, ezért az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt körön minden háromszögben rajta van az A_1, C_1 magasságtalppont is. Ezt a kört a háromszög *Feuerbach*–féle körének[1] nevezik.

A most szerzett ismereteink felhasználásával számítsuk ki a B_1FB_0 szöget.

Az ugyanazon íven nyugvó kerületi és középponti szögek között fennálló ismert összefüggés alapján

$$A_0FB_0\sphericalangle = 2A_0C_0B_0\sphericalangle = 2\gamma,$$
$$A_0FB_1\sphericalangle = 2A_0B_0B_1\sphericalangle = 2\alpha,$$

amiből

$$B_1FB_0\sphericalangle = |A_0FB_0\sphericalangle - A_0FB_1\sphericalangle| = 2|\gamma - \alpha_0|$$

adódik minden háromszögre.

A fenti C_0B_1 ill. A_0B_0 szakasz a trapéz átlója vagy oldala lesz aszerint, hogy a B_1 pont az AC oldal felezőpontjához viszonyítva melyik csúcshoz van közelebb. A B_1 pont helyzetét az α és γ szögek közt fennálló nagyságviszony szabja meg. Ha $\alpha < \gamma$, akkor $90^\circ - \alpha > 90^\circ - \gamma$, és mivel nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, B_1 a C csúcshoz közelebb kerül, mint az A-hoz.

A feladat szögadatai szerint a $\alpha < \beta < \gamma$, így a másik két esetben is felírhatjuk ezt a különbséget:

$$A_1FA_0\sphericalangle = 2(\gamma - \beta), \qquad C_1FC_0\sphericalangle = 2(\beta - \alpha).$$

Most már könnyen felírhatjuk a feladatban szereplő FX, FY, FZ félegyenesek közti szögeket. Tekintsük pl. az XFY szöget. Mivel $\gamma > \alpha$ és $\gamma > \beta$, azért az A_1 és B_1 magasságtalppontok mindegyike közelebb van a C csúcshoz,

[1]Ez a kör az M magasságpontból felére kicsinyített képe a háromszög köré írt körnek, ezért felezi a magasságvonalaknak a magasságpont és a csúcs közé eső szakaszát is. Erre tekintettel használják rá a „9 pont köre” elnevezést is, néhol pedig „Euler–köre” néven említik. Könnyű látni a tett kiegészítés alapján, hogy az MAB, MBC, MCA háromszögek Feuerbach–köre ugyancsak k. Megemlítjük még, hogy k érinti az ABC háromszögbe beírt kört is, úgyszintén a 3 hozzáírt kört (a háromszög egy oldalát kívülről és két oldalának meghosszabbítását érintő kört). Hozzávéve e 4 érintési pontot, valamint ugyanezeket az MAB, MBC, MCA háromszögek részéről, a k-n levő nevezetes pontok száma 25-re emelkedik.

Derékszögű háromszögben azonban M egybeesik a derékszög csúcsával, ezért a további 3 háromszög elfajult vagy azonos az eredetivel. Egyenlő szárú háromszögben szintén csökken e nevezetes pontok száma, egyenlő oldalú háromszögben még inkább.

mint az A_0, B_0 oldalfelezőpont. Így

$$XFY\sphericalangle = A_0FB_0\sphericalangle - (A_0FX\sphericalangle + B_0FY\sphericalangle) = 2\gamma - \left\{\frac{1}{3}2(\gamma-\alpha) + \frac{1}{3}2(\gamma-\beta)\right\} =$$
$$= \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) = 120^\circ.$$

Hasonló, de mégsem egészen ez a helyzet az YFZ szög esetében. Most, mivel $\alpha<\beta$ és $\alpha<\gamma$, a B_0, C_0 felezési pontok közelebb vannak az A csúcshoz, mint B_1, C_1 és így

$$YFZ\sphericalangle = B_0FC_0\sphericalangle + \frac{1}{3}B_1FB_0\sphericalangle + \frac{1}{3}C_0FC_1\sphericalangle = 2\alpha + \frac{1}{3}\big\{2(\gamma-\alpha) + 2(\beta-\alpha)\big\} =$$
$$= \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma) = 120^\circ.$$

E két eredmény alapján $ZFX\sphericalangle = 120^\circ$ is teljesül.

Végeredményben a kérdezett félegyenesek által bezárt szögek nem függnek a háromszög szögeitől. A szögek számértéke csak azt a célt szolgálta, hogy a versenyzők el tudják dönteni az oldalfelező és magasságtalppontok sorrendjét az egyes háromszögoldalakon.