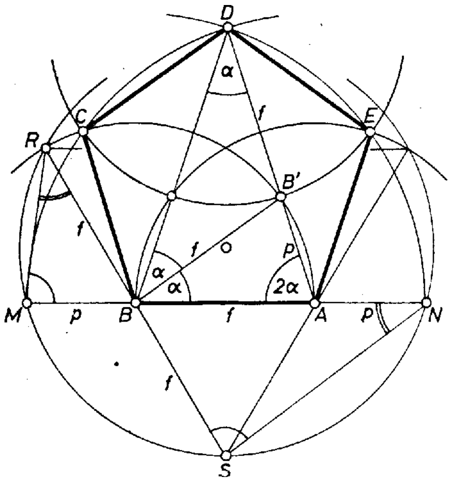
a) Jelöljük az AB egyenesnek a szabályos háromszög köré írt körrel való második metszéspontját N-nel, az egyenlő oldalú háromszög A-val szemközti csúcsát R-rel, a B-vel megfelezett oldal másik végpontját S-sel, az egymással egyenlő BM, AN szakaszok hosszúságát p-vel.



1. ábra

Az NMR és NSR, valamint az MRS és MNS szögek páronként egyenlők mint ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek, ezért a BNS és BRM háromszögek hasonlók, amiből adódik, hogy

(1) $$(f+p) : f = f : p.$$

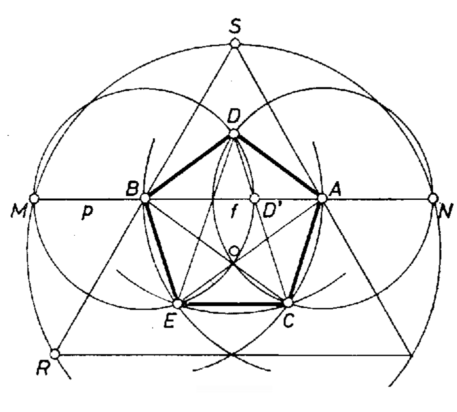
Az előírt egyenlő szárú háromszögben $AB = f$ és $BD = DA = f + p$. Mérjük fel DA-ra a $DB' = f$ szakaszt. Az előző aránypárból és a közös szögből következik, hogy az ABB' háromszög hasonló a BDA háromszöghöz, $ABB' \sphericalangle = BDB' \sphericalangle = \alpha$. Másrészt az ABB' háromszög a hasonlóság miatt szintén egyenlő szárú, tehát $AB = BB' = B'D = f$. Innen $BDB' \sphericalangle = DBB' \sphericalangle = \alpha$, $DBA \sphericalangle = 2\alpha$. Eszerint az ABD háromszög szögeinek összege $5\alpha = 180°$, ahonnan $\alpha = 36°$. Tehát az ABD háromszög egy szabályos ötszög két átlója és egy oldala által alkotott háromszög.

Ezek szerint C a B' pont tükörképe BD-re, tehát $BCD \sphericalangle = BB'D \sphericalangle = = 108°$ – és ugyanekkora a $DEA \sphericalangle$, hiszen E a C tükörképe a DBA háromszög tengelyére, továbbá $CBA \sphericalangle = CBD \sphericalangle + DBA \sphericalangle = B'BD \sphericalangle + DBA \sphericalangle = 3\alpha = 108°$ – és ugyanekkora az $EAB \sphericalangle$, végül a CDE szög is mint a szerkesztett ötszög ötödik szöge. A kérdéses ötszög mindegyik oldala f, mindegyik szöge egyenlő, tehát az ötszög szabályos.

Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.

b) Az eredményünkből következő $AD = AC = BE$ egyenlőség miatt az ötszög C csúcsa az A középpontú AD sugarú körön, E pedig a B középpontú ugyanekkora sugarú körön is rajta van. Mivel ezt a két körívet már a D szerkesztésekor megrajzoltuk, ezeket a D középpontú, f sugarú körrel elmetszve egyszerre kapjuk a C és D csúcsok helyzetét. Ezáltal valóban sikerült a szerkesztés puszta végrehajtási lépéseinek számát csökkenteni, elmaradhat a B és A körüli f sugarú körívek megrajzolása.

c) Előző bizonyításunk alapján, a szakaszok szerepét megváltoztatva (1) így is olvasható: az f alapon p szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszög hasonló az $(f+p)$ alapon f szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszöghöz, amilyen az 1. ábrán kapott szabályos ötszög DCE részháromszöge. Eszerint adott $AB = f$ átlójú szabályos ötszög szerkesztése céljára a feladatban leírt szerkesztést az M pont előállításáig változatlanul megismételhetjük. Ezután D az AB alapon BM szárral, C és E pedig a BD, ill. AD alapon – ezeknek AB-t tartalmazó partján – AB szárral szerkesztett egyenlő szárú háromszög csúcsai. Így az $ADBEC$ ötszög átlói egyenlők, és – mint a $BAD \sphericalangle = ABD \sphericalangle = 36°$ szögekből kiindulva a fentiekhez hasonlóan kiszámítható – mindegyik szöge $108°$, tehát az ötszög hasonló az 1. ábra eredményéhez, megfelel a követelményeknek (2. ábra). – Azt is mondhatjuk, hogy a leírt szerkesztésben AM helyett BM-et írva és a „kifelé” szó helyére a „befelé” szót, az $ABCDE$ szabályos csillagötszög csúcsait kaptuk az AB szakaszból.



2. ábra

Eredményünkből látható, hogy C az A körüli, E pedig a B körüli p sugarú körön is rajta van, amelyeket D előállítása céljára már megrajzoltunk, ezért C és E kijelöléséhez az AB sugárral elég D körül kört rajzolni.

Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. **1.** A megoldás *c)* részében leírt szerkesztés helyessége anélkül is bizonyítható, hogy felhasználnánk az *a)* résznek a szögek értékére vonatkozó eredményeit; illetve ezeket az eredményeket (1)-ből és a *c)* szerkesztésből is megkaphatjuk. Messe a B körüli, M-en átmenő kör az AB egyenest D'-ben, ekkor $AD' = f - p$, és mivel (1)-ből

$$\frac{f}{p} = \frac{f+p}{f} = 1 + \frac{p}{f} \qquad \text{és} \qquad \frac{f}{p} - 1 = \frac{f-p}{p} = \frac{p}{f}; \tag{2}$$

azért a $D'AD$ és DAB háromszög oldalaira

$$\frac{D'A}{DA} = \frac{DA}{BA},$$

a két háromszög hasonló, hiszen A-nál levő szögük közös. Ezért a $D'AD$ háromszög is egyenlő szárú, $D'D = D'A$, és $BAD\sphericalangle = \beta$ jelöléssel $ABD\sphericalangle = ADD' = \beta$, továbbá mivel a BDD' háromszög is egyenlő szárú, azért $BDD'\sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$. Így pedig az ABD háromszög szögeinek összege $(90^\circ - \beta/2) + 3\beta = 90^\circ + 5\beta/2 = 180^\circ$, és $\beta = 36^\circ$, $ADB\sphericalangle = 108^\circ$, $BDD'\sphericalangle = 72^\circ$.

Mivel (2) azt is jelenti, hogy a $DD'B$ és DBC egyenlő szárú háromszögekben $DD' : BD = BD : BC$, azért e két háromszög hasonló, $CDB\sphericalangle = BDD'\sphericalangle$, vagyis D'-n átmegy a DC átló. Így pedig C a B pont tükörképe a $DD'A$ szög szögfelezőjére, ami egyben AD felező merőlegese. Továbbá E a C tükörképe AB felező merőlegesére, tehát az ötszög D-nél, A-nál és B-nél levő szöge 108°, és a C-nél és E-nél levő szögei egyenlők.

2. Sokan az *a)* rész bizonyítását számítással végezték. (1)-ből

$$p^2 + pf - f^2 = 0, \qquad \frac{p}{f} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$
$$\frac{f+p}{f} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

és a vagylagos előjelből esetünkben csak a felső használható. Ebből az következik, hogy az *egyenlő oldalú* és (az utasítás szerint) AB felező merőlegesére *tengelyesen szimmetrikus* $ABCDE$ ötszög D-ből induló átlóinak és oldalainak aránya $(1+\sqrt{5})/2 = 1{,}6180$. – Másrészt hivatkoztak lapunk F. 1766. feladatára[1], hogy ez az arány kétszer akkora, mint a szabályos ötszög szöge felének, 54°-nak a sinusa. Ebből az következik, hogy az ötszög C és E csúcsánál levő szög 108°-os. A további három szög értékének megállapítása többnyire hiányzik.

3. Sok dolgozat tartalmazza a beküldő több–kevesebb ismeretét a folytonos arányú osztásról – klasszikus nevén: szakasz *aranymetszés*éről –, de *nem állítja a feladatban kitűzött cél szolgálatába.*

[1] K. M. L. 43 (1971) 14. oldal.