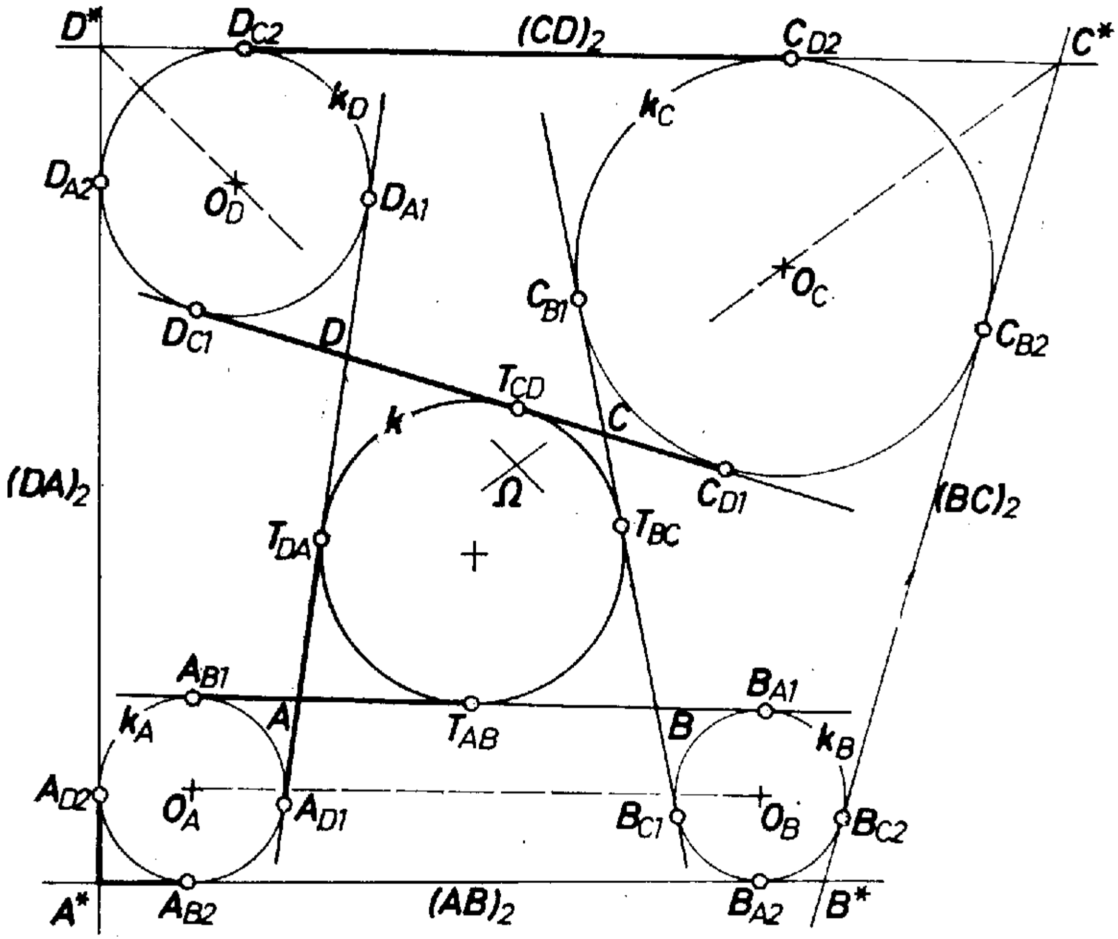
1. Feladatunk olyan kör létezését megmutatni, amely érinti mind a négy „új” közös érintőt. Az iskolai tananyagban arra az esetre láttunk tételt, ha a négy érintő körülzárja a kérdéses kört, az érintési pontok a négyszög oldalszakaszain vannak; ekkor a szemközti oldalpárok összegei egyenlők. Az I. o. tankönyv bizonyítás nélkül kimondja e tétel megfordítását: *ha egy konvex négyszög* $2-2$ *szemközti oldalának összege egyenlő, akkor a négyszögbe kör írható.* Ennek alapján az 1. ábra esetében elég a szemben fekvő oldalpárok összegének egyenlőségét belátni.



1. ábra

Az eredeti k körön és a fölvett 4 körön $4-4$ érintési pontot kell tekintenünk, együttvéve 20 pontot. Ezeket, valamint az új köröket az alábbiak szerint jelöljük. Az $ABCD = N$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalának érintkezési pontja k-val rendre T_{AB}, $\ldots$, T_{DA}. Az A szög csúcsszögtartományában fölvett k_A kör középpontja O_A, érintési pontja az AB és AD oldal meghosszabbításán A_{B_1}, A_{D_1}, és hasonlóan jelöljük a többi három kört, középpontjukat és érintési pontjukat, az A, B, C, D betűk helyére ciklikusan a következőt írva, az ábra szerint: B_{C_1}, B_{A_1}, C_{D_1}, $\ldots$, D_{C_1}. A k_A, k_B körök második közös külső érintőjét az AB egyenesnek az O_AO_B egyenesre való $(AB)_2$ tükörképe adja, érintési pontjai A_{B_1}-nek és B_{A_1}-nek a tükörképei: A_{B_2}, illetve B_{A_2}, és hasonlóan a további „új” érintők $(BC)_2 = B_{C2}C_{B_2}$, $\ldots$. Végül a kérdéses négyszög első csúcsa az $(AB)_2$ és $(DA)_2$ tükörképek A^* metszéspontja, a továbbiak pedig B^*, C^*, D^*.

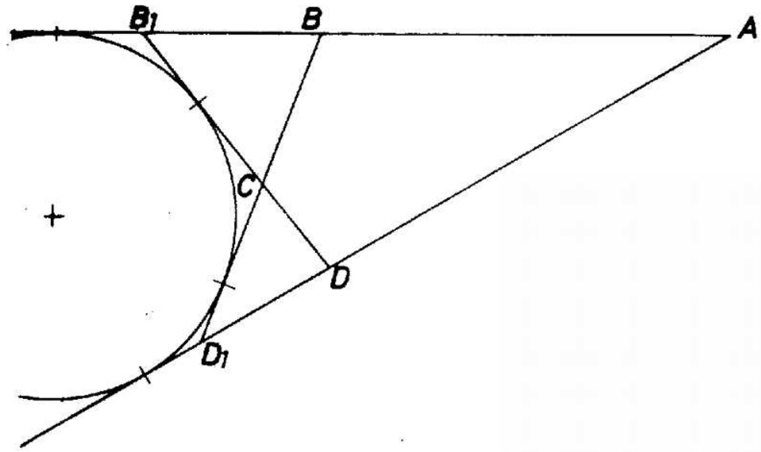
A bizonyításban az $A^*B^*C^*D^* = N^*$ négyszög oldalszakaszait az érintési pontokkal részekre osztjuk. Felhasználjuk, hogy egy pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő, továbbá, hogy két kör egynemű közös érintőin az érintési pontok közti szakaszok egyenlők. Az utóbbi állítást az *új kör* párok esetében a *külső* közös érintőkre alkalmazzuk a végzett szerkesztés utolsó lépéseire, viszont k és *egy új* kör esetében a *belső* közös érintőkre, a szerkesztés kiindulási lépéseire. Ezek alapján kapjuk, hogy N^*-ban is egyenlő a két oldalösszeg, tehát az idézett megfordítás szerint N^*-ba kör írható.

$$\begin{aligned}
A^*B^* + C^*D^* &= (A^*A_{B_2} + A_{B_2}B_{A_2} + B_{A_2}B^*) + (C^*C_{D_2} + C_{D_2}D_{C_2} + D_{C_2}D^*) = \\
&= A^*A_{D_2} + A_{B_1}B_{A_1} + B^*B_{C_2} + C^*C_{B_2} + C_{D_1}D_{C_1} + D_{A_2}D^* = \\
&= A^*A_{D_2} + A_{B_1}T_{AB} + T_{AB}B_{A_1} + B^*B_{C_2} + C_{B_2}C^* + \\
&+ C_{D_1}T_{CD} + T_{CD}D_{C_1} + D_{A_2}D^* = \\
&= A^*A_{D_2} + A_{D_1}T_{DA} + B_{C_1}T_{BC} + B^*B_{C_2} + C_{B_2}C^* + T_{BC}C_{B_1} + \\
&+ T_{DA}D_{A_1} + D_{A_2}D^* =
\end{aligned}$$

(összevonva a 2. és 7. tagot, valamint a 3. és 6. tagot, sorrendi cserékkel)

$$
\begin{aligned}
&= A^*A_{D_2} + A_{D_1}D_{A_1} + D_{A_2}D^* + B^*B_{C_2} + B_{C_1}C_{B_1} + C_{B_2}C^* = \\
&= (A^*A_{D_2} + A_{D_2}D_{A_2} + D_{A_2}D^*) + (B^*B_{C_2} + B_{C_2}C_{B_2} + C_{B_2}C^*) = \\
&= A^*D^* + B^*C^*,
\end{aligned}
$$

ezt akartuk bizonyítani. – A beírt kör középpontját meg is kereshetjük, mint N^* két szomszédos (belső) szöge felezőinek metszéspontját.



2. ábra

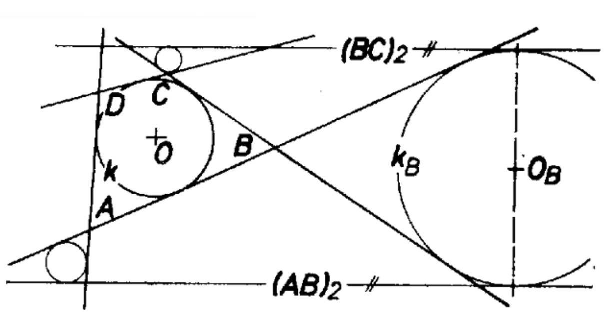
2. Ne hátráljunk meg a feladat megengedte tág lehetőségek elől! Viszont másféle eseteket már csak vázolunk. Tulajdonképpen mindig érintőnégyszögről van szó, ha *négy egyenes* ugyanazt a kört érinti, és ezek valahogyan négyszöget alkotnak; nem az a lényeges, hogy az érintési pontok az oldalszakaszokon legyenek. A 2. ábrán a *konvex* $ABCD$ négyszögben és a konkáv AB_1CD_1 négyszögben egyaránt a szemben fekvő oldalpárokból képezett különbség abszolút értékei egyenlők,

$$AB - CD = AD - BC, \quad \text{ill.} \quad AB_1 - CD_1 = AD_1 - B_1C,$$

de a kör nincs „benne” egyik négyszögben sem. Gondolhat az olvasó a BB_1DD_1 hurkolt négyszögre is! Deltoidnak két érintő köre van, hacsak nem ráadásul még a rombuszság követelményét is teljesíti.

Ha a szerkesztésünkből adódó N^* négyszögben ezt a tulajdonságot találjuk (az összegek egyenlősége helyett), ezt az 1. pontban látott elv értelemszerű módosításával „bizonyíthatjuk”. (A bizonyítások lényegesebb része azonban mindig a fordított állítás bizonyítása volna!)

3. Mivel a feladat szerint 4 kör nagyságát (sugarát) választhatjuk szabadon, könnyű olyan helyzetet létrehozni, amelyben *két egymás utáni új közös érintő párhuzamos.* Nagyobbra véve k_B-t, mint amekkora a k, található benne olyan átmérő, hogy a végpontjaiban húzott érintők megfelelnek $(AB)_2$ és $(BC)_2$ szerepére, vagyis közrefogják k-t és háromszöget metszenek le az $ABCD$ négyszög A-beli és C-beli csúcsszögtartományából. Es ha ezeknek a beírt körét vesszük k_A, k_C szerepére, akkor semmilyen k_D-vel nem jön létre a kérdéses négyszög (3. ábra).



3. ábra