I. megoldás. A felírt két egyenletből látjuk, hogy mindkét háromjegyű szám négyzete hatjegyű, tehát A-nak és C-nek mint az alapok elöl álló jegyének értéke legalább 3. A feltétel szerint különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, és A-nak és C-nek mint az alapok utolsó jegyének négyzete B-re, ill. F-re végződik, tehát sem A, sem C nem lehet 5 vagy 6. Eszerint A és C lehetséges értékei

$$3,\ 4,\ 7,\ 8,\ 9, \tag{3}$$

négyzetüknek a végződései rendre

$$9,\ 6,\ 9,\ 4,\ 1, \tag{4}$$

a B és F szóbajövő értékeit ezek adják.

Négyzetszám utolsó két jegyét nem befolyásolja az alapban a százasok helyén álló számjegy, ezért az első egyenletben BC és FB közti összefüggést vizsgálhatjuk anélkül, hogy A értékét ismernénk.

Az első egyenletből látjuk, hogy B értékét C négyzetének utolsó jegye adja, ha pl. $C = 7$, akkor $B = 9$, $BC = 97$. FB értékét négyzetre emeléssel kiszámíthatjuk: $FB = 09$; ekkor $BF = 90$, ami a második egyenlet szerint BA négyzetének kétjegyű végződése. Ámde 90-re végződő négyzetszám nincs, ez nem lehet megoldása a feladatnak.

Vegyük sorra BC szóbajövő értékeit. Ezek (3) és (4) alapján 93, 64, 97 (ezt már megvizsgáltuk), 48, 19. Négyzeteiknek végződése: 49, 96, 09, 04, 61. A fordított sorrendben felírt 94, 69, 40 és 16 közül a 94 és 40 nem négyzetvégződés, mert ha egy négyzetszám utolsó jegye 0, akkor előtte is 0 áll, ha viszont az utolsó jegye 4-es, akkor előtte páros számjegy áll. A fennmaradt két esetben $BF = 69$ vagy $BF = 16$.

Ha $BF = 69$, akkor $A = 3$ vagy $A = 7$, és így az első esetben

$$ABC = 364, \qquad ABC^2 = 132\,496,$$
$$CBA = 463, \qquad CBA^2 = 214\,369,$$

eleget is tesznek a feltételeknek.

Ha pedig $A = 7$, akkor $ABC = 764$, $CBA = 467$. Az első egyenletből BC^2 utolsó két jegye $FB = 96$, $B = 6$, a második egyenletből BA^2 utolsó két jegye $BE = 89$, $B = 8$. Ez B-re ellentmondás.

A másik szóbajött esetben $ABC = 419$, $CBA = 914$. Az előbbihez hasonlóan BA^2 utolsó két jegye $BF = 96$, és BC^2 utolsó két számjegye $FB = 61$, ami B-re ismét ellentmondás.

Összefoglalva, a feladatnak csak egy megoldása van, mint láttuk: $A = 3$, $B = 6$, $C = 4$, $D = 1$, $E = 2$ és $F = 9$.

II. megoldás. A két négyzet kétjegyű végződése egymás megfordítottja. Ennek alapján leszűkíthetjük a vizsgálandó végződések számát. E célra megmutatjuk, hogy az egymás utáni négyzetszámok kétjegyű végződéseiben 25^2 végződése után nem találunk újat, az eddigiek fordított sorrendben ismétlődnek, 50^2 után pedig az 1^2 és 50^2 közöttiek szakaszosan ismétlődnek.

Valóban, ha x egész szám és $0 \le x \le 25$, akkor $50 \ge 50 - x \ge 25$, és $(50 - x)^2$ kétjegyű végződése egyezik x^2 kétjegyű végződésével, mert különbségük:

$$(50 - x)^2 - x^2 = 50(50 - 2x) = 100(25 - x),$$

másrészt

$$(50 + x)^2 - x^2 = 50(50 + 2x) = 100(25 + x),$$

mindkettő osztható 100-zal és ez igazolja állításainkat.

A 25^2-ig előfordult 22-féle végződés közül a két különböző számjegyből alakuló, megfordítható végződések 16 és 61, valamint 69 és 96. Ezek először rendre 4 és 19, ill. 13 és 14 négyzetében lépnek föl, így az előzők szerint

$$\begin{aligned}
&\ldots 16 - \text{ra végződik a } \ldots 04, \ldots 46, \ldots 54, \ldots 96 \text{ számok négyzete,}\\
&\ldots 61 - \text{re végződik a } \ldots 19, \ldots 31, \ldots 69, \ldots 81 \text{ számok négyzete,}\\
&\ldots 69 - \text{re végződik a } \ldots 13, \ldots 37, \ldots 63, \ldots 87 \text{ számok négyzete,}\\
&\ldots 96 - \text{ra végződik a } \ldots 14, \ldots 36, \ldots 64, \ldots 86 \text{ számok négyzete.}
\end{aligned} \tag{5}$$

Az alapokra így talált végződések közül többet mellőzhetünk a következő két észrevétel alapján. (1) és (2) mindegyikében az alapszám végződése más, mint a négyzetéé, az alapszám tízes értékű jegye megismétlődik a négyzetének kétjegyű végződésében, mégpedig (1) esetében a végződés 2. jegyében, (2) esetében a végződés 1. jegyében.

(5)-ben kiemelten vastag számjegyekkel írtuk az alapvégződések közül ezeknek megfelelőket, a közönséges számjegyekkel szedettek nem adhatnak megoldást. És mivel a … 16-os négyzetvégződés így lehetetlenné vált, elmarad a … 61-es végződés is, tehát – ha egyáltalán van megoldás – az csak az alábbiak kiegészítése lehet:

(1)-ből: $\ldots\ 64^2 = \ldots\ 96$,
(2)-ből: $\ldots\ 63^2 = \ldots\ 69$,

tehát $B = 6$, $C = 4$, $A = 3$, $F = 9$, így a két alapszám 364, illetve 463.

Négyzetük rendre: 132 496, 214 369, megfelel a hátralevő számjegyekre tett követelményeknek is, $D = 1$, $E = 2$. A megoldást befejeztük.