I. megoldás. *a)* Ha el tudnánk helyezni hat egész számot egy tetraéder élein úgy, hogy a lapokon az összegük ugyanaz az S szám legyen, akkor a hat szám összege páros. Valóban, a lapokon kapott összegek összege egyrészt $4S$, másrészt egyenlő az élekre írt hat szám összegének a kétszeresével, hiszen minden él két lapon szerepel. Tehát a számok összege $2S$, ahol S egész. Az első hat természetes szám összege azonban páratlan, emiatt ezeket nem lehet felírni a tetraéder éleire úgy, hogy a lapokon ugyanazt az összeget kapjuk.

b) Jelöljük a tetraéder csúcsaiba írt négy szám összegét C-vel, a felezőpontokba írt hat szám összegét F-fel, a lapok 6–6 számának összegét S-sel.

A négy lap összegében a csúcsok számai háromszor és a felezőpontok számai kétszer fordulnak elő, más szóval: mindegyik számunk 2-szer és C tagjai még egyszer. Az adott számok összege $C+F=55$, innen

$$4S=110+C.$$

Az egyenletből azt is leolvashatjuk; hogy C páros, de nem osztható 4-gyel. C legkisebb értékeként $1+2+3+4=10$, legnagyobb értékeként $10+9+8+7=34$ jön szóba, ennek megfelelően S legkisebb értéke 30, legnagyobb értéke 36.

Az adott 10 szám közül a tetraéder mindegyik lapja négyet–négyet nem tartalmaz. Nevezzük az ilyen számnégyeseket a szemben levő csúcs környezetének, összegüket „csúcskörnyéki” összeg-nek. Nyilván a négy csúcskörnyéki összeg is egyenlő egymással, jelöljük ezt K-val, így $K=55-S$ és mivel az előző egyenletből

$$S=\frac{110+C}{4}, \qquad \text{azért} \qquad K=\frac{110-C}{4}.$$

Ezek alapján felírjuk C, S és K lehetséges értékrendszereit:

C	10	14	18	22	26	30	34
S	30	31	32	33	34	35	36
K	25	24	23	22	21	20	19

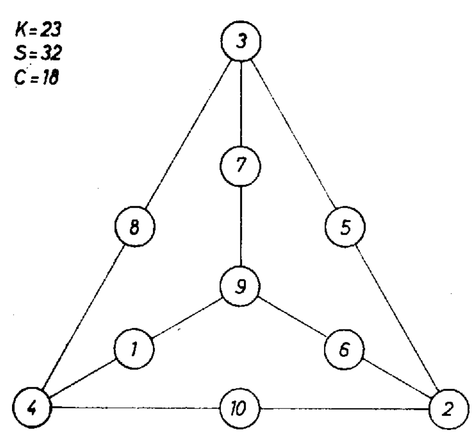
Próbáljunk olyan elrendezést keresni, melyben $K=23$. Vegyük 23-nak az adott számok közül a következő négyesből való előállítását a tetraéder felső csúcsának környezete céljára

I. 1+6+7+9.

Ekkor az alapon levő 3 csúcs környezete céljára 23 további felbontásai közül csak azok jönnek szóba, amelyeknek az I.-vel pontosan egy közös számuk van az egyes alapcsúcsokba lefutó oldalél felezőpontja céljára. Ezek a következők (a közös számot vastag számjeggyel szedtük):

II. **1**+4+8+10; **III.** **6**+2+5+10; **VI.** **7**+2+4+10; **VIII.** **9**+2+4+8.
IV. **6**+3+4+10; **VII.** **7**+3+5+8;
V. **6**+4+5+8;

Ugyanígy a további három csúcskörnyéki számnégyesnek is páronként egy közös elemüknek kell lennie. Ennek a II.-kal együtt eleget tesz a III. és a VII. a 10-es, ill. 8-as számmal, és ez a két négyes együtt is megfelel, egyetlen közös elemük az 5. Az így adódó elrendezésnek a tetraéder alapsíkjára való merőleges vetületét az **1.** ábra mutatja.



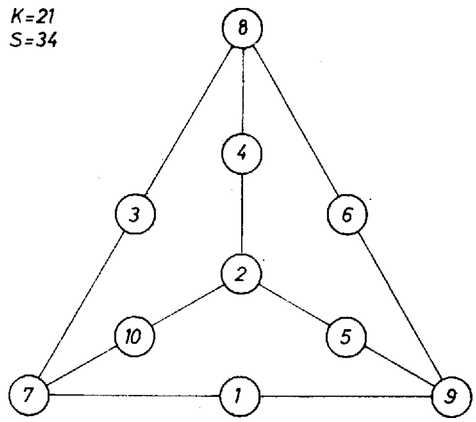
1. ábra

A csúcsokba az a száma maradt a számnégyeseknek, amelyik nem közös semelyik másik négyessel sem.

Előkészítésünkből hasonlóan kapunk két további megoldást: a II. számnégyest a VIII-kal pótolva, majd abból, a III-at a IV-kel pótolva.

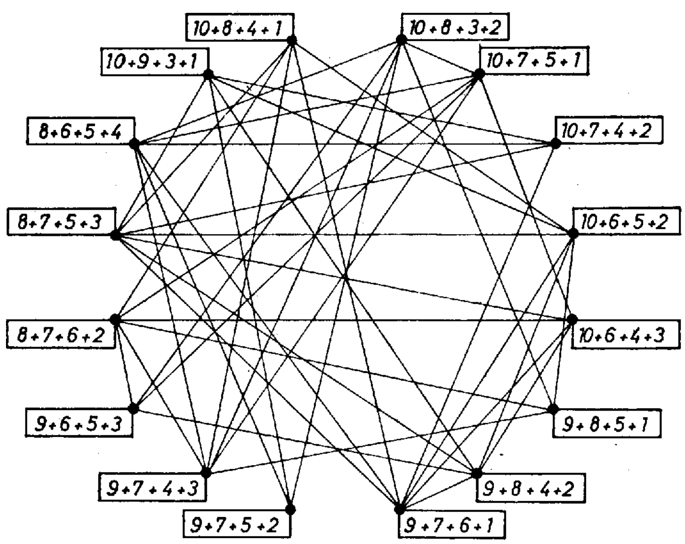
II. megoldás. a feladat *a)* részéhez. Vegyünk egy kitérő élpárt: közülük bármelyiknek a kétszereséhez adjuk is hozzá a másik négy élhez rendelt számok összegét, így két lap számainak összegét, tehát ugyanazt a számot kapjuk. Emiatt a kitérő élekhez rendelt számoknak egyenlőeknek kell lenniük, nem teljesíthető tehát a feladat követelménye.

Megjegyzések. 1. A *b)* rész minden megoldásához van egy komplementer megoldás is, ezt úgy kapjuk, hogy mindegyik szám helyébe az őt 11-re kiegészítő számot írjuk. Nyilvánvaló, hogy ezáltal a csúcskörnyéki összegek, ill. lapösszegek ismét egyenlők lesznek, pl.
$K = 23$, $S = 32$, $C = 18$ komplementerjében $K' = 44 - K = 21$, $S' = 66 - S = = 34$, $C' = 44 - 18 = 26$. Az 1. ábra ilyen párja a 2. ábra elrendezése.



2. ábra

2. Megoldásunkban a 23 négytagú összegre való bontásairól volt szó, különböző természetes számokból. Ha minden szóba jöhető felbontást előállítunk, összesen 16-ot kapunk. Ezekből egy 16–csúcsú gráfot alakíthatunk ki, ha éllel kötjük össze mindazokat, amelyeknek pontosan egy közös eleme van. Megoldásunkban ennek a gráfnak a négy elemű teljes részgráfjai közül állítottunk elő néhányat, vagyis olyan felbontásnégyeseket kerestünk, amelyekre az teljesül, hogy bennük bármely kettőnek egy közös eleme van (3. ábra).



3. ábra