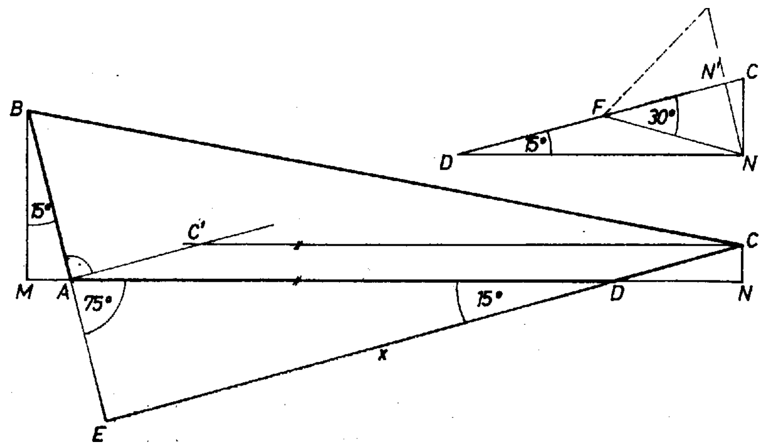
1. Vegyük észre, hogy az $ABCD$ négyszög A és D csúcsánál levő külső szögek összege $75^\circ + 15^\circ = 90^\circ$, s így az AB és CD oldalak meghosszabbításával létrejött háromszög derékszögű. Jelöljük e háromszögnek a derékszögnél fekvő csúcsát E-vel.



A szerkesztést ennek alapján a következőképpen végezhetjük el. Az AB szakaszra A végpontjában felmérjük az BAD szöget, és az A pontban a szakaszra (ugyanazon az oldalán) állított merőlegesre egy, a DC-vel egyenlő AC' hosszúságot. Az AC'-t AD szögszárral párhuzamosan eltoljuk, míg metszi a B középpontú BC sugarú kört, itt kapjuk a négyszög C csúcsát. Végül D-t a C-ből AB-re bocsátott merőleges metszi ki. C létrejön, mert a párhuzamos egyenes C' pontja a körön belül van.

2. Az $ABCD$ négyszög területét ki tudjuk számítani, ha kiegészítjük derékszögű trapézzá úgy, hogy C-ből és B-ből merőlegest állítunk az AD oldalegyenesre. Jelöljük a merőlegesek talppontját rendre N-nel és M-mel. Az $ABCD$ négyszög területét megkapjuk, ha $CNMB$ trapéz területéből kivonjuk a CND és BMA háromszögek területének összegét.

A CND háromszög CD oldalához tartozó magasságvonalát könnyen kiszámíthatjuk. Jelöljük e magasság talppontját N'-vel és a CD oldal felezőpontját F-fel. Mivel a háromszög derékszögű, $FN = FC$, $FDN\sphericalangle = DNF\sphericalangle = 15^\circ$, $N'FN\sphericalangle = 30^\circ$, így $FNN'\sphericalangle = 60^\circ$ háromszög fele egy egyenlő oldalú háromszögnek:

$$FN = 2, \quad NN' = 1, \qquad N'F = \sqrt{3},$$
$$CND_{ter} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2 \text{ cm}^2.$$

Mivel BMA háromszög $5 : 4$ arányú nagyítása a DNC háromszögnek, ezért

$$\text{területe } \left(\frac{5}{4}\right)^2 \text{-szer akkora, azaz}$$
$$BMA_{ter} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot 2 = \frac{25}{8} = 3{,}125 \text{ cm}^2.$$

A $CNMB$ trapéz területének kiszámításához először írjuk fel a szükséges méreteket. A CN, BM és NM hosszúságok meghatározásához a Pitagorasz tételt használjuk fel:

$$CN = \sqrt{NN'^2 + N'C^2} = \sqrt{1^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

A mondott hasonlóság miatt, $DN = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ alapján

$$BM = \frac{5}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \text{és}$$

$$NM = \sqrt{BC^2 - (BM - CN)^2} = \sqrt{22^2 - \left(2{,}5\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Így a trapéz területe

$$NCBM_{ter} = \frac{5}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)NM = 63{,}56 \text{ cm}^2.$$

Az adatokat pontosnak tekintjük, a szükséges közelítő értékeket táblázatból kerestük ki, és így az $ABCD$ négyszög területe $58{,}43 \text{ cm}^2$.

Megjegyzés. A négyszög területét kiszámíthatjuk az EBC és EAD derékszögű háromszögek területének különbségeként is, miután a $DE = x$ szakaszt az

$$(x+4)^2 + (x \operatorname{tg} 15^\circ + 5)^2 = 22^2$$

egyenletből kiszámítottuk.