Hatványt ismételt szorzással számítunk ki. Két egész szám szorzatának utolsó k jegye sorra egyenlő a tényezők utolsó k jegyéből álló számok szorzatának utolsó k jegyével. Valóban, a T_i tényező ($i = 1, 2$) utolsó k jegyéből összeolvasott számot A_i-vel, az előtte álló jegyekből összeolvasott számot B_i-vel jelölve

$$T_1T_2 = (10^k \cdot B_1 + A_1)(10^k \cdot B_2 + A_2) = 10^k(10^k B_1 B_2 + B_1 A_2 + B_2 A_1) + A_1 A_2,$$

itt az első tag utolsó k jegye zérus, állításunk tehát helyes.

A feladatnak megfelelően ezt elsősorban $k = 3$ mellett alkalmazzuk, így elég 973^{46} utolsó 3 jegyét keresnünk. Másrészt táblázatunkra tekintettel $k = 2$ mellett is felhasználjuk. Követendő eljárásunkat 973^2 utolsó 3 jegyének meghatározásán mutatjuk be.

973^2 hatjegyű szám, a négyzettáblázat viszont négy értékes jegyre kerekítve közli: $9467 \cdot 10^2$. Itt az utolsó értékes jegy aszerint adja meg a pontos érték százas jegyét, illetve annál 1-gyel nagyobb, hogy a kerekítésben elhagyott utolsó 2 jeggyel leírt szám 50-nél kisebb vagy nem.

Az utolsó két jegy viszont a fentiek szerint ugyanaz mint 73^2-ben, ami 4-jegyű szám, ezért a táblázat 5329 adata pontos. Eszerint a 29-es végződés alapján nincs fölfelé kerekítés, tehát 973^2 utolsó 3 jegye 729.

(Célszerű ugyanezeket így is átgondolni: a táblázat szerint 973^2 egyrészt a 946 650 és 946 750 számok közé esik, másrészt 73^2-nel együtt 29-re végződik, tehát 946 729-cel egyenlő.)

Eszerint 973^4 utolsó 3 jegye sorra egyezik 729^2 utolsó 3 jegyével, ez pedig a $729^2 = 5314 \cdot 10^2$ és $29^2 = 841$ adatok alapján hasonlóan 441.

Továbbmenve, 973^8 utolsó 3 jegyét megadja 441^2 utolsó 3 jegye, ami $441^2 = 1945 \cdot 10^2$ és $41^2 = 1681$ alapján 481, mert a 81 miatt fölfelé kerekítéssel kaptuk az 5-öst;

973^{16} utolsó 3 jegye $481^2 = 2314 \cdot 10^2$ és $81^2 = 6561$-ből 361;

973^{32} utolsó 3 jegye $361^2 = 1303 \cdot 10^2$ és $61^2 = 3721$-ből 321.

Mivel előírt kitevőnk előállítható összegként az eddig látott kitevőkből: $46 = 32 + 8 + 4 + 2$, azért 973^{46} utolsó 3 jegye ugyanaz, mint a $321 \cdot 481 \cdot 441 \cdot 729$ szorzaté. Ezt is meghatározhatjuk a táblázat alapján, egy szorzás helyett két négyzetre emelést végezve.

Legyen az első két tényező esetében

$$\begin{aligned} 321 &= a - b, \\ 481 &= a + b, \end{aligned}$$

amiből $a = 401$, $b = 80$ és $321 \cdot 481 = a^2 - b^2 = 401^2 - 80^2$, ahol a fentiek mintájára 401^2 végződése 801, a 80^2-é közvetlenül 400, tehát $321 \cdot 481$ végződése $801 - 400 = 401$.

Hasonlóan $441 \cdot 729$ végződése

$$585^2 = \left(\frac{441 + 729}{2}\right)^2 \quad \text{és} \quad 144^2 = \left(\frac{441 - 729}{2}\right)^2$$

végződéseinek $225 - 736 \quad (+1000)$ különbségeként 489 (a kivonandót $144^2 = 2074 \cdot 10$-ből és $(44)^2 = 1936$-ból számítottuk); végül $401 \cdot 489$ végződése $445^2 - 44^2$-ből $025 - 936$, azaz 089. Ezzel megválaszoltunk a feladat kérdésére.

Megjegyzések. 1. Történeti érdekességként említjük, hogy az

$$AB = \frac{(A+B)^2}{4} - \frac{(A-B)^2}{4}$$

azonosság alapjában valóban használtak szorzás céljára négyzettáblázatokat, pontosabban az x bemenő számhoz mindjárt $\frac{x^2}{4}$ értékét megadó „negyednégyzet”-táblázatokat.

2. Célhoz érhetünk a 973-as alap más kitevőjű hatványain át is, azaz más sorrendben alkalmazva négyzetre emeléseket és különböző tényezők összeszorzását. Három lehetőség a kitevők sorozatára (és utánuk összehasonlításul a fent használt):

$$\begin{array}{l} 2,\ 4,\ 8,\ \mathbf{3},\ \mathbf{11};\ 22,\ 44;\ \mathbf{46} \\ 2,\ 4,\ 8;\ \mathbf{9};\ 18,\ 36;\ \mathbf{45};\ \mathbf{46} \\ 2,\ 4,\ 8,\ 16;\ \mathbf{20},\ \mathbf{22};\ 44;\ \mathbf{46} \\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32;\ \mathbf{40},\ \ \mathbf{6},\ \mathbf{46} \end{array}$$

A vastag számjegyekkel a szorzás – azaz két négyzetreemelés – útján képezett hatványok kitevőit különböztettük meg.

Ajánljuk az érdeklődő olvasónak a következő kérdés vizsgálatát: Van-e kapcsolat egyrészt a szükséges négyzetreemelések, valamint szorzások száma, másrészt 46-nak a kettes számrendszerbeli 101 110 alakja közt?

3. Célhoz érhetünk a fenti 3 szorzás helyett 1 szorzással és 1 osztással is

$$973^{46} = \frac{973^{32} \cdot 973^{16}}{973^2} = \frac{(\ldots 321) \cdot (\ldots 361)}{\ldots 729} = \frac{\ldots 881}{\ldots 729}$$

alapján. Jelöljük 973^{46}-nak a százas, a tízes, az egyes értékű helyen álló számjegyét rendre A, B, C betűvel. Így $729(100A+10B+C)$ háromjegyű végződése, azaz $900A+290B+729C$ végződése 881, tehát csak $C=9$ jöhet szóba. Ezt beírva, majd 10-zel egyszerűsítve $90A+29B$ kétjegyű végződése $(881-561)/10=32$, ami szerint csak $B=8$ jöhet szóba, ezt beírva $90A$ kétjegyű végződése 00, ezért csak $A=0$ lehet és 973^{46} végződése $ABC=089$

4. Elég sok dolgozat $1973=2000-027$ alapján $(-027)^{46}$ háromjegyű végződését kereste meg. Ez már a 2. hatványnál beletorkollik a fentibe, hiszen $27^2=729$, amit fent is találtunk a 2-es kitevő mellett.

5. A számok köbének táblázata általában nem alkalmas a fenti eljárás „gyorsítására”, mert már a kétjegyűek köbét is nagyobb részben csak kerekítve közli a négyjegyű táblázat, hiszen $n>21$ mellett $n^3>10^4$.