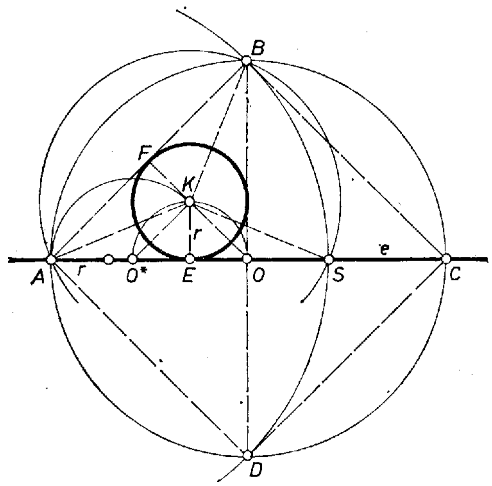
Jelöljük a beírt kör középpontját K-val, sugarát r-rel. Az adott kör és az adott egyenes természetesen érintik egymást. Érintse a kör az AC egyenest E pontban, az AB egyenest F-ben (1. ábra).



1. ábra

Az AOF háromszög derékszögű és $AF = FO \cdot K$ az FO szakaszon van, ezért $FO = r + KO$. AF egyenlő AE-vel, így

$$AE = FO = r + KO, \tag{1}$$

továbbá $KE = ED = r$.

A négyzet AB oldalára az előzőek alapján adódik, hogy

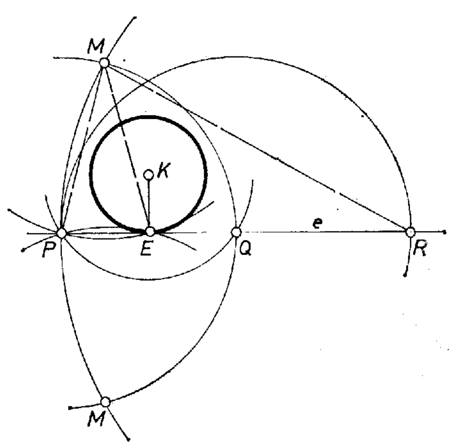
$$AB = 2AF = 2AE. \tag{2}$$

Az E érintési pont helyzetének ismeretében kijelölhetjük a négyzet O középpontját is. E-ből kiindulva a $KE = r$ távolságot két irányba mérhetjük fel az AC egyenesre. E két helyzet KE-re szimmetrikus, a kapott két megoldás egybevágó lenne, ezért elegendő az egyiknek megfelelően elvégezni a szerkesztést.

Az (1) észrevétel alapján könnyen megszerkeszthetjük a négyzet A és C csúcsát. Vegyük a KO távolságot körzőnyílásba és mérjük fel E-ből kiindulva az AC egyenesre az O-val ellentétes irányba, majd tovább haladva a $KE = r$ távolságot is, így megkapjuk az A csúcsot. O körül OA távolsággal leírt körön lesz egyrészt C, másrészt a B és D csúcs is. Ezeket a (2) észrevétel felhasználásával szerkeszthetjük meg: A-t tükrözzük E-re, képe legyen S, a kapott $AS = 2AE$ távolsággal, mint sugárral rajzoljunk kört A körül, ez metszi ki a B és D csúcsokat.

A feladatnak az adott feltételek mellett tehát mindig van megoldása és mint láttuk, lényegében csak egy.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldása során az E pont helyzetét adottnak tekintettük. A szerkesztés abban az esetben is elvégezhető, ha az érintési pont nincs megadva, annak helyzetét nekünk kell meghatároznunk, szintén csak körző felhasználásával.[1] Ez a következőképpen lehetséges. K körül az adott kör sugaránál nagyobb távolsággal kört rajzolunk, ez metszi az adott e-t a P és Q pontban. P és Q körül PQ sugárral köröket rajzolva, a Q középpontú kör az e egyenest R pontban metszi. Ezen metszéspont körül a $PR = 2PQ$ sugárral húzott kör M pontban találkozik a P középpontú körrel. Végül az M középpontú és MP sugarú kör kimetszi az e egyenesből az E érintési pontot (2. ábra).



[1]A csak körzővel végezhető szerkesztésekkel kapcsolatban lásd Strommer Gyula; Mohr „Euclides Danicus"-a c. cikkét K. M. L. 45 (1972) 103-108. old.

2. ábra

A szerkesztés helyességét a következőképpen láthatjuk be. A PRM háromszög hasonló PEM háromszöghöz. Mindkettő egyenlő szárú, és a P csúcsban levő szögük közös. Mivel $MP = PQ$ és $PR = 2PQ$, a hasonlóság aránya, $1:2$, ezért $PE : PM = 1 : 2$, megfelelő oldalak, tehát E valóban felezi PQ-t.

Valamivel nehezíti a feladatot, ha az érintő egyenese helyett annak csak két pontja adott.

2. Némi rövidítést érhetünk el a szerkesztésben a következőkkel (az 1862. feladat[2] II. megoldásához fűzött megjegyzés szellemében).

Az $EA = r + KO$ szakasz két tagjából előbb az r-et mérjük fel, O^* végpontját az O-val egy csapásra (egy körzőmozdulattal) kaphatjuk, majd O^* körül az $O^*K = KO$ sugárral a körző csúcsának fölvétele nélkül kapjuk A-t.

S-et kimetszhetjük az egyenesből a K körüli KA sugarú körrel is, és ebből: a körből már az O körüli OA sugarú kör kimetszi a B-t, hiszen az értelmezés szerint $KB = KA$.

[2]Lásd a megoldást K. M. L. 47 (1973) 204-206. oldal.