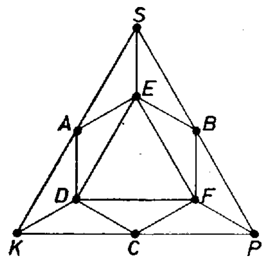
I. megoldás. Kíséreljük meg ellenpéldát adni az állításra, vagyis az A, B, …, F pontokat azzal a kiegészítő követelménnyel kiszínezni, hogy a tíz kis háromszög egyikének se legyen mind a három csúcsa más-más színű. Azt fogjuk belátni, hogy ez nem lehetséges, és ez fogja bizonyítani a feladat állítását.



1. ábra

A kiegészítő követelmény – másképpen: az állítással való szembehelyezkedés – célszerű lesz. Ugyanis az eredeti előírás csak csekély korlátozást jelent a színezésben (csupán az oldalfelező pontok részére zár ki egy-egy színt), vagyis megfordítva: sok lehetőséget enged a színek választásában; de főleg azért, mert sok munkát ígér avval, hogy minden egyes színezés végeztével addig kell ellenőriznünk kis háromszögeit, míg találunk köztük egy, az állítás szerint létező „háromszínű” háromszöget. A kiegészítő követelményt viszont már a színezés folyamán, az ábra részleteiben érvényre lehet juttatni, sőt éppen azt várjuk, hogy így egyetlen színezést sem lehet majd befejezni; nem végzünk tehát hiábavaló munkát, vagy legalábbis kevesebbet.

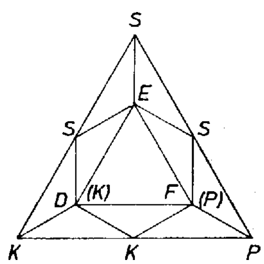
A kiegészítő követelmény melletti színezés lehetetlen volta néhány háromszög megfelelő színezése után abból fog kiütközni, hogy az utolsónak (vagy mások után) színezendő pont számára a benne összefutó háromszögek egyike-másika tiltja egyik-egyik szín alkalmazását, és több ilyen háromszög együttesen mind a 3 színt letiltja.

Az oldalfelező pontok lényegében kétféleképpen színezhetők:

I. együttvéve két színnel, ha ti. a háromszög valamelyik csúcsának színét mindkét onnan kifutó oldal felezőpontja örökli, a szemben levő oldal felezőpontja pedig a további két szín egyike;

II. úgy, hogy A, B, C mindegyike más színű.

Az I. lehetőségre példa, ha $A = S = B$ és $C = K$ (röviden az egyenlőség jelével rendeljük hozzá a ponthoz a szín kezdőbetűjét, 2. ábra).

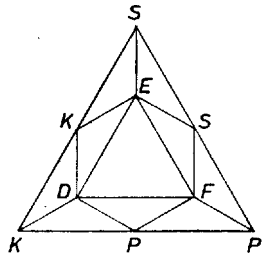


2. ábra

Minden más ilyen, azaz 2 színt használó lehetőség visszavezethető erre, az ábra 120°-os elfordításával vagy tengelyes tükrözésével. Ugyanis nem változtat a feladaton, ha az ABC és DEF háromszögeket szabályosaknak tekintjük, a többieket egyenlő szárúaknak, hiszen a követelmények szempontjából nem lényeges, hogy a megindulásban hol van a K, a P, az S csúcs, helyettük akár X, Y, Z színt vagy akár három különböző jelet is írhatnánk. Ezt röviden így mondjuk: *a feladat szimmetriái alapján* elég a választott példával foglalkoznunk; itt szimmetrián tágabb értelemben a színek egyenrangúságát is értjük.

A 2. ábrán az F pont az FPK háromszög miatt nem lehet S, különben a háromszög háromszínű lenne; továbbá hasonlóan F az FPS háromszög miatt K sem lehet, tehát arra kényszerítettük magunkat, hogy F-et P-re fessük. Folytatólag a $DFK = DPK$ háromszög miatt $D \neq S$, a DKS háromszög miatt $D \neq P$, tehát egyedül $D = K$ lehetséges. Így pedig E a $ESD = ESK$, $EDF = EKP$ és $EFS = EPS$ háromszögek egyidejű figyelembevételével az előzetes megjegyzés szerint színezhetetlen.

Az oldalfelező pontok II. típusú színezése mellett A színe meghatározza B-ét, majd C-ét is (vagy előbb a C-ét, utána a B-ét), a szimmetria alapján elég az $A = K$, $B = S$, $C = P$ esettel foglalkozunk (3. ábra, itt a még meglevő forgási szimmetria miatt kissé lassabban jutunk előre).



3. ábra

Az EKS háromszög miatt $E \neq P$. Ha $E = K$ volna, akkor az $EFS = KFS$ háromszög miatti $F \neq P$, és az FSP háromszög miatti $F \neq K$ letiltásból $F = S$ következnék, és D színezhetetlenné válna a DKP, $DPF = DPS$, $DFE = DSK$ háromszögek miatt. Eszerint már csak $E = S$-től remélhető megoldás. A színek szimmetriáját felhasználva ugyanígy kapjuk azt, hogy csak $F = P$ és $D = K$ lehetséges, így pedig a DEF háromszög háromszínű.

Ezzel az előrebocsátottak szerint a feladat állítását bebizonyítottuk.

II. megoldás. Hosszabbnak ígérkezik a színezést a teljesen szabad D, E, F pontokkal kezdeni, mégis rövidebben érünk célhoz, egyszerűbben ütközünk bele A, B vagy C színezhetetlenségébe. – Az I. megoldáshoz hasonlóan itt sem engedünk meg háromszínű háromszöget, vagyis minden kis háromszögben megkövetelünk legalább egy szín-ismétlődést.

Mivel a DEF háromszög szimmetrikusan fekszik a KSP háromszöghöz képest, és a színek eddigi felhasználásuk szerint is egyenrangúak (mindegyik színnel 1 pont), azért a DEF háromszögben ismétlődő színnek bármelyiket választhatjuk, legyen ez K. Erre azonban nem festhetők együtt E és F, mert így (1. ábra) a $SEB = SKB$ és a $PFB = PKB$ háromszögek miatt $B \neq P$ és $B \neq S$, holott B színének a feladat követelménye szerint vagy P-nek vágy S-nek kellene lennie. (Eddig D szóba sem jött, tehát lehetetlen a $D = E = F = K$ színezés is.)

Így D-nek kell kéknek lennie, továbbá E és F egyikének. $D = K$ alapján az ábra a K szín szempontjából szimmetrikus a KB tengelyre, ezért elég $E = K$-val próbálkozni. Ekkor a $SEB = SKB$ háromszögből $B \neq P$, tehát az eredeti követelmény szerint $B = S$; az $FBE = FSK$ és $FBP = FSP$ háromszögekből $F = S$; végül a $CPF = CPS$ és $CDF = CKS$ háromszögekből C nem festhető egyik előírt színére sem. Nem lehet tehát mindegyik pontot színezni, ha nem engedünk meg háromszínű háromszöget.

III. megoldás. A feladat állítását indirekt úton igazoljuk. Tegyük fel, hogy van olyan színezés, amikor nincs olyan kis háromszög, amelynek mind a három csúcsa különböző színű. Nevezzük PK oldalnak egy háromszög olyan oldalát, amelynek egyik végpontja piros, a másik kék. Számoljuk le kétféleképpen a PK oldalakat úgy, hogy mindegyiket annyiszor vegyük számításba, ahányszor fellép valamelyik kis háromszög oldalaként.

a) A PK oldalak száma páros, hiszen ha egy kis háromszögnek van PK oldala, akkor pontosan két ilyen oldala van, mert ekkor csúcsainak színezése vagy P, P, K vagy P, K, K.

b) A PK oldalak száma páratlan, mert a nagy háromszög kerületén pontosan egy PK oldal van, és belsejében minden PK oldal pontosan két háromszög révén jön számításba.

A kapott ellentmondás azt bizonyítja, hogy mindig van legalább egy olyan kis háromszög, amelynek mind a három csúcsa különböző színű.

Megjegyzés. Az elmondott gondolatmenet alkalmazásával a feladat sokkal általánosabb feltételek mellett is megoldható, lásd a pontversenyen kívüli P. 180. probléma később közlendő megoldását.