

$$(1) \quad \frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1.$$

Az  $|x-3|$  tag föllépése miatt két esetet kell megkülönböztetnünk.

I. Ha  $x-3 \geq 0$ , azaz  $x \geq 3$ , akkor (1) első törtje írható így is:

$$\frac{2x}{x-3-5} = 2 + \frac{16}{x-8},$$

és ezzel (1) így alakítható:

$$(2) \quad \frac{16}{x-8} \geq -1 - \frac{1}{x+2}.$$

A jobb oldal nevezőjére  $x+2 \geq 5$ , ezért az egész intervallumban

$$(3) \quad -1 > -1 - \frac{1}{x+2} \geq -1 - \frac{1}{5} = -1,2.$$

A bal oldal zérushelye viszont kettéválasztja az intervallumot. Ha

$$(*) \quad x > 8,$$

akkor a bal oldal pozitív, ez tehát (2) és (3) szerint megoldása az egyenlőtlenségnek. Ha ellenben  $3 \leq x < 8$ , akkor a bal oldal negatív, és legnagyobb értéke  $x=3$  esetén  $-3,2$ , eszerint ebben a részintervallumban nincs megoldás.

II. Az  $x < 3$  esetben (1) két tagjának a nevezője közösnek adódik:

$$(4) \quad \frac{2x}{-x+3-5} + \frac{1}{x+2} = \frac{1-2x}{x+2} \geq 1,$$

más szóval: a bal és jobb oldal különbsége nem lehet negatív:

$$\frac{1-2x}{x+2} - 1 = \frac{-1-3x}{x+2} \geq 0,$$

vagyis a számlálónak és a nevezőnek egyenlő előjelűnek kell lennie, megengedve még azt is, hogy a számláló 0 legyen.

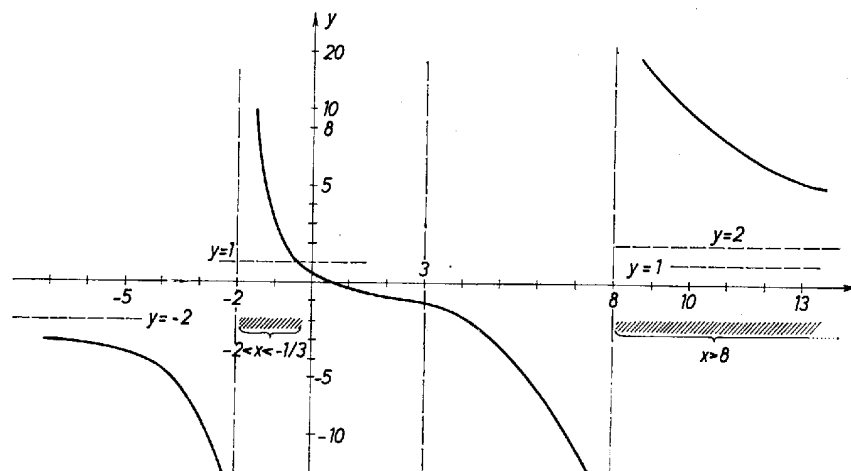
A számláló is, a nevező is a vizsgált intervallumban vált előjelet, a számláló a  $-\frac{1}{3}$  helyen áthaladva pozitívból negatívra változik, a nevező a  $(-2)$  helyen áthaladva negatívból pozitívvá lesz, így (4) a köztük levő

$$(**) \quad -2 < x \leq -\frac{1}{3}$$

értékekre teljesül. Részletezve lásd e táblázaton:

| ha            | $x < -2$ | $-2 < x \leq -\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3} < x < 3$ |
|---------------|----------|----------------------------|------------------------|
| akkor $-1-3x$ | $> 0$    | $\geq 0$                   | $< 0$                  |
| $x+2$         | $< 0$    | $> 0$                      | $> 0$                  |

Ezek szerint (1) megoldásai a (\*) és (\*\*) értékek.



*Megjegyzés.* (1) bal oldalának változását grafikonunk mutatja. A görbe az  $x=3$  pontban folytonos, mert ott  $x-3$  folytonos, de törése van.