I. megoldás. Első hallásra meglepő, hogy n-ről $(n+1)$-re áttérve a számjegyek összegének párosnak kell maradni, vagyis páros számmal kell megváltoznia; hiszen azt tartanánk természetesnek, hogy a növelésre a jegyösszeg is 1-gyel növekedjék. Valóban, ez a gyakoribb eset – ti. ha n utolsó jegye nem 9-es –, mert így csak az utolsó jegy változik meg 1-gyel, páratlan számmal, és ezért a jegyösszeg is vagy párosról páratlanra változik vagy fordítva; itt tehát nincs keresnivalónk. Vizsgálódásra érdemes feladat azonban nemegyszer a ritkábban föllépő esetekben adódik, itt a 9-es végződésű n-eknél, amikor az $(n+1)$ szám végén legalább két helyen lép föl új jegy.

Jelöljük az n szám végén álló 9-esek számát k-val, vagyis a jobbról $(k+1)$-edik jegy már nem 9-es. $(n+1)$-re áttérve ennek a jegynek a helyére 1-gyel nagyobb lép, utána pedig k db 0 következik – azaz 9-cel kisebbek –, tehát a jegyösszeg változása $(1-9k)$. Ez nyilvánvalóan akkor és csak akkor páros, ha k páratlan. – Eszerint a legkisebb megfelelő n, $(n+1)$ számpár 1 db 9-essel a 19 és a 20, 3 db 9-essel az 1999, 2000.

Mivel $n<10^6$, azaz legföljebb 6 jegye van, azért k-ra feladatunkban $k\le 5$-nek is teljesülnie kell.

I. Ha $k=5$, akkor $n=A99\,999$ alakú, ahol $A=1$, 3, 5 vagy 7, hiszen a jegyek $A+5\cdot 9$ összege csak páratlan A mellett lesz páros, másrészt $A\neq 9$; az ilyen n-ek száma tehát 4.

II. Ha $k=3$, akkor $n=ABC\,999$ alakú, ahol $A+B+C$ páratlan és $C\neq 9$. Az utóbbi föltétel miatt C a 0, 1, ..., 8 jegyek valamelyike, azaz 9-féleképpen választható, a B 10-féleképpen, végül az ezekkel már meghatározott $(B+C)$-t az A jegy 5-féleképpen teheti páratlanná: páratlan $(B+C)$ esetén rendre a 0, 2, 4, 6, 8 jegyekkel, páros $(B+C)$ esetén az 5 páratlan jeggyel. Ebbe a csoportba tehát $5\cdot 10\cdot 9=450$ db megfelelő n tartozik.

III. Végül $k=1$ esetén hasonlóan $n=ABCDE9$, ahol $E<9$ és $(A+B+C+ +D+E)$ páratlan; a II. eset gondolatmenetét megismételve ide $5\cdot 10^3\cdot 9=45\,000$ db megfelelő n tartozik.

Mindezek alapján a feladat kérdésére a válasz: $45\,000+450+4=45\,454$ db a 10^6-nál kisebb, páros jegyösszegű olyan n természetes szám van, hogy $(n+1)$ számjegyeinek összege is páros.

II. megoldás. Ha már tudjuk, hogy n csak akkor lehet megfelelő, ha a végén páratlan számú 9-es előtt egy, a 9-estől különböző számjegy áll, akkor a megfelelők számának megállapítását így is végezhetjük, mindjárt tetszőleges j mellett a 10^j korlátig.

Ha j páratlan, akkor n végén számunkra maximálisan $(j-2)$ db 9-es jön szóba, hiszen a j db 9-essel írt szám elé már nem jöhet egy, a páratlan $9j$ összeget párossá tevő jegy; ha pedig j páros, akkor a $(j-1)$ db 9-es végű számok még szóba jönnek. Az olyan természetes számok létszáma, amelyek kisebbek, mint 10^j és amelyekben az utolsó s helyen 9-es áll – tekintet nélkül arra, hogy milyen jegy áll közvetlenül előttük –, nyilvánvalóan $N_s=10^{j-s}$, hiszen az utolsó s hely előtti $(j-s)$ számú helyen az összes olyan szám sorban föllép, mely $(j-s)$ jeggyel leírható, megengedve azt is, hogy mind a $(j-s)$ helyen zérus álljon. Így az olyan számaink száma, amelyeknek a végén pontosan s db 9-es áll: $N_s-N_{s+1}=10^{j-s}-10^{j-s-1}=9\cdot 10^{j-s-1}$.

Megmutatjuk, hogy e számok közül ugyanannyiban páros a számjegyek összege, mint amennyiben páratlan – hacsak még N_{s+1} is páros szám, azaz $j-s-1\ge 1$, másképpen $s\le j-2$; pontosabban azt, hogy ez az állítás a $(j-s)$-jegyű és a $(j-s-1)$-jegyű számokra külön-külön igaz, igaz tehát az N_{s+1} számú szám elhagyásával előálló halmazra is. Ugyanis $j-s-1\ge 1$ miatt még a $(j-s-1)$ jegyű számok is a 0-tól kezdve egyesével növekedően tíztagú csoportokba foghatók össze, minden egyes csoport tíz száma csak az utolsó jegyben különbözik egymástól, és az utolsó jegyek közül $5-5$ páratlanná, illetve párossá teszi az előttük álló közös számjegyeik összegét. És ez az egyenlőség akkor is megmarad, ha mögéjük csupa 9-eseket írunk. Eszerint a pontosan s db 9-esre végződő, $j(\ge s+2)$ jegyű, páros jegyösszegű számok száma

$$\frac{N_s}{2}-\frac{N_{s+1}}{2}=5\cdot 10^{j-s-1}-5\cdot 10^{j-s-2}=45\cdot 10^{j-s-2}, \qquad (*)$$

ha

$$j-s-2\ge 0,\qquad \text{azaz}\quad s\le j-2.$$

Mi ezt a páratlan s-ekre (az I. megoldásbeli k értékekre) tekintjük, így 10 kitevői $s=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ mellett: $j-3,\ j-5,\ j-7,\ \ldots$ lesznek, és a 2-esével való csökkenésre tekintettel a (*) számok összege a $454545\ldots$ alakú lesz. Ha j páratlan, akkor $s=j-2$ esetére (*) $45\cdot 10^0$-t ad, vagyis 45-öt, tehát az összeg végén is 45 áll, jegyeinek száma $(j-1)$, a „45” számjegypároké $\dfrac{j-1}{2}$.

Ha pedig j páros – mint eredeti feladatunkban $j=6$ –, akkor fenti felezési meggondolásunk $s=j-1$-re még helyes, de N_{s+1} már nem felezhető, ez az érték 1, az $(s+1)=j$ db 9-essel végződő számok száma. A j db 9-essel írt n szám még kisebb 10^j-nél és jegyösszege $9j$ is páros szám, mégsem felel meg, mert ekkor $n+1=10j$, és jegyeinek összege 1, nem páros. Eszerint $s=j-1$ mellett (*) helyett $5-1=4$-et kapunk, tehát a feladatnak megfelelő n-ek számát a $(j-1)$ db számjeggyel írt $4545\ldots 4$ szám adja meg.

Összefoglalva: a 10^j határig megfelelő n-ek száma a következő $(j-1)$ jegyű szám: $4545\ldots$