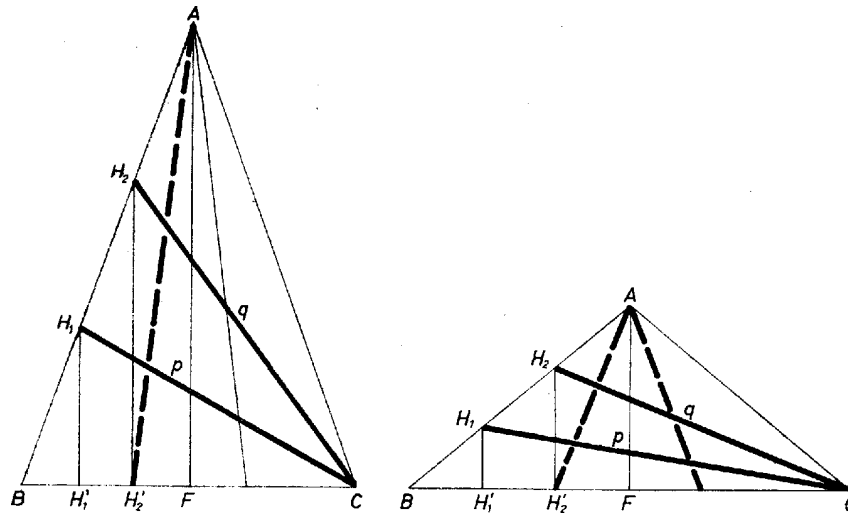


Jelöljük az egyenlő szárú háromszög alapját a -val, a hozzá tartozó magasságot m -mel, a magasság talppontját F -fel, a harmadoló pontokat B -től A felé haladva H_1 , H_2 -vel, az alapra való merőleges vetületüket H'_1 , H'_2 -vel, C pontnak H_1 és H_2 -től való távolságát p -vel és q -val, a keresett távolságot x -szel.



A párhuzamos szelők tételéből következik, hogy $BH'_2 = \frac{2}{3}BF$, a szimmetria miatt $BF = \frac{1}{2}BC$, így $BH'_2 = \frac{1}{3}BC$, tehát $AH'_2 = x$.

Ugyancsak a párhuzamos szelők tételéből adódik, hogy $BH'_1 = \frac{1}{6}a$, $FH'_2 = \frac{1}{6}a$, $H_1H'_1 = \frac{1}{3}m$, $H_2H'_2 = \frac{2}{3}m$. A $H_1CH'_1$, $H_2CH'_2$, H'_2AF derékszögű háromszögekre alkalmazva Pitagorasz tételét:

$$p^2 = \left(\frac{1}{3}m\right)^2 + \left(\frac{5}{6}a\right)^2, \quad q^2 = \left(\frac{2}{3}m\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2, \quad x^2 = m^2 + \left(\frac{1}{6}a\right)^2.$$

Az egyenleteket egyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 36p^2 = 4m^2 + 25a^2, \\ (2) \quad & 9q^2 = 4m^2 + 4a^2, \\ (3) \quad & 36x^2 = 36m^2 + a^2. \end{aligned}$$

Mivel mindhárom egyenlet jobb oldalán csak m^2 -es és a^2 -es tag áll, kereshetünk olyan λ és μ számot, amellyel (1)-et, illetve (2)-t szorozva és összeadva, a jobb oldalon mindjárt éppen (3) jobb oldalát kapjuk. m^2 és a^2 együtthatói alapján

$$\begin{aligned} 4\lambda + 4\mu &= 36, \\ 25\lambda + 4\mu &= 1, \end{aligned}$$

innen kivonással tüstént $\lambda = -\frac{35}{21} = -\frac{5}{3}$, és tovább az elsőből $\mu = 9 - \lambda = \frac{32}{3}$ ilyen szorzók. Valóban, (1)-et $-\frac{5}{3}$ -dal, (2)-t $\frac{32}{3}$ -dal szorozva és összeadva

$$96q^2 - 60p^2 = 36m^2 + a^2 = 36x^2.$$

Ahonnán rögtön kapjuk, hogy $x^2 = (8q^2 + 5p^2)/3$.

A feladat nem adja meg közelebről a 17 és 20 távolságok szerepét, ezért a $p = 17$, $q = 20$ és a $p = 20$, $q = 17$ esetek mindegyike lehetséges. Az elsőben $x_1 = \sqrt{585} \approx 24,2$ cm, a másodikban $x_2 = \sqrt{104} \approx 10,2$ cm. Mindkét eredmény eleget tesz a kívánt feltételeknek.