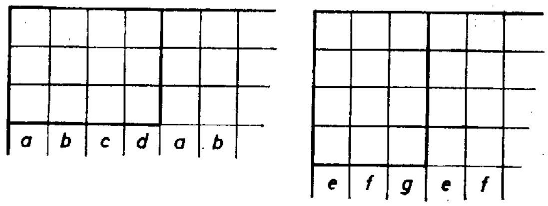
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a terv nem hajtható végre. Elég evégett tekinteni a táblázatnak egy 4×12-es téglalapját, vagyis 4 egymás alatti sorából és 12 egymás utáni oszlopából alakuló téglalapját, sőt ebben is csak a beírandó 2-es számjegyeket. Föltesszük, hogy ezek beírhatók a követelmények szerint.

Vágjunk ki egy átlátszatlan papírlapból egy 3×4 mezőnyi téglalap alakú *ablakot*, helyezzük azt fekvő helyzetben a táblázat bal felső sarkába és jelöljük a 4 látható (3 mezőnyi magas) oszlopban álló 2-esek számát rendre a, b, c, d-vel. Így az előírás szerint

$$a+b+c+d=5,$$

tehát a, b, c, d közül legalább egynek legalább 2 az értéke.



1. ábra

Az ablakot 1 oszloppal jobbra tolva balról eltűnik a db 2-es, de ugyanennyi megjelenik a jobbról következő oszlopban (1. ábra a) része). Ezt folytatva kapjuk, hogy a felső három sor oszlopaiban a 2-esek száma négytagú szakaszokban ismétlődik.

Megismételve eljárásunkat álló helyzetű ablakkal (1. ábra b) része), legyen az első 3 látható (4 mezőnyi magas) oszlopban talált 2-esek száma rendre e, f, g, így

(1) $$e+f+g=5,$$

és az ablakot 1–1 mezőnyivel jobbra tolva, a balról eltűnő 2-esek helyett minden lépésben ugyanannyit találunk az újabb és újabb láthatóvá váló oszlopokban, tehát a 2-esek szám háromtagú szakaszokban ismétlődik.

12 oszloppal jobbra lépve teljes szakasz fejeződik be a, b, c, d-ből is, e, f, g-ből is. Egymás fölé-alá írva oszloponként az első három, illetve az első négy sorban álló 2-es jegyek számát:

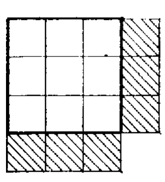
a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d,
e, f, g, e, f, g, e, f, g, e, f, g,

nyilvánvaló, hogy az alsó szám sehol sem kisebb a fölötte állónál.

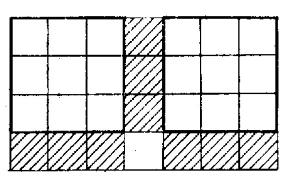
Mármost az e, f, g betűk mindegyike föllép az a, b, c, d betűk mindegyike alatt, az utóbbiak közül viszont legalább az egyik legalább 2, tehát e, f, g mindegyike legalább 2. Így pedig nem teljesülhet (1); állításunkat bebizonyítottuk.

Bőősi Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. A táblázatban bárhol választott 3×3 mezős négyzetet legalább két oldala mentén lehet toldani 3×4-es, illetve 4×3-as téglalappá (2. ábra a) része), egy-egy 3×1-es, illetve 1×3-as téglalappal. Mind a két kis téglalapban ugyanaz a három számjegy áll valamilyen sorrendben, hiszen mind a két kis téglalap ugyanannak a négyzetnek a számjegykészletét egészíti ki az előírás szerintire.

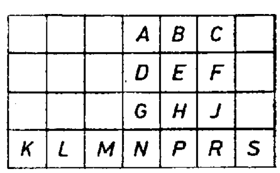


2a.



2b.

Ezek alapján vizsgáljuk a 2b ábra vonalkázott részeivel egyidejűleg lefedhető, egymással egyező jegyek kapcsolatait (hiszen az álló téglalap közvetítésével az ábra két fekvő téglalapjában is ugyanaz a három jegy áll valamilyen sorrendben).



3. ábra

Tegyük rá a táblázatra a 3. ábrát úgy, hogy az M mező egy 0 jegyre essék és A, K, S is fedjenek egy-egy jegyet. Ha most a 2a ábra bal alsó 1×3-as téglalapját egymás után a KLM, LMN, MNP mezőhármasra tesszük rá, rendre kapjuk, hogy az ADG, a BEH, a CFJ mezőhármasokon van 0 jegy. És mivel az A, C, R, N sarokmezőkkel meghatározott téglalapban együttvéve 3 db van, azért N, P, R egyikén sem áll 0.

Másrészt a 2b ábra hal oldali fekvő téglalapját a KLM mezőkre téve adódik, hogy a P, R, S mezők egyikén 0 áll. Ez az előbbi eredmény alapján csak S lehet. Eszerint amelyik sorban van 0, abban 4 mezővel jobbra lépve is 0-t találunk és közben nincs 0; továbbá a táblázat határától elég távol kijelölt 3×1-es és 1×3-as téglalapban legföljebb egy db 0 található.

Az 1-esekre térve, nem fedhet L, M mindegyike 1-est, mert akkor A, D, G közt is, B, E, H közt is két-két 1-es volna és a BPM csúcsú ablakban öt 1-est látnánk. Hasonlóan nem fedhet 1-eseket az L, N pár sem, mert akkor a BH oszlopban két, az AG, CJ oszlopokban egy-egy db 1-es lenne (L, illetve N miatt), és az $ACRN$ ablakban legalább 5 lenne.

Ezek szerint, ha M 1-est fed, de K, L, N, P egyike sem. akkor az $ACJG$ négyzet mindhárom oszlopában egy-egy db 1-es áll, az $ACRN$ ablakban pedig négy db, ezért R is 1-est fed, tehát az M során végigmenve, az 1-esek hármasával ismétlődnek. Azt is kaptuk itt, hogy M, N, P, R oszlopában van 1-es, így minden oszlopban van, tehát minden sorban is, hiszen táblázatunkat $90°$-kal elfordítva; oszlopai sorokká válnak és tulajdonságai megmaradnak.

Végül a 2-esekről ezt kapjuk: nem fedhet K, L, M mindegyike 2-est, mert akkor már az $ACJG$ négyzet hat db-ot tartalmaz belőle.

Eszerint ha egy sorban van 0 jegy, akkor a két legközelebbi 0 közti három hely valanelyikén van 1-es, de csak egyen.

A talált szabályszerűségek szükséges föltételei a táblázat kitölthetőségének. Legyen az i-edik sor olyan, amely tartalmaz 0-okat ($4 \leqq i \leqq 50$). Jelölhetjük e 0-ok oszlopainak sorszámát így: $k, (k+4), (k+8), (k+12), \ldots$, ahol $3 \leqq k \leqq 50$. Akárhogy választjuk mármost az (i,k) és $(i,k+4)$ mezők közti 1-es oszlopának sorszámát, tőle jobbra haladva hármasával, előbb - utóbb olyan mezőre kellene írnunk 1-est ahol már 0 áll: ha 1-es áll

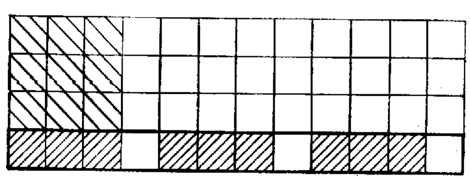
az $(i,k+1)$-en,	akkor az $(i,\ k+4)$-en is,
az $(i,k+2)$-n,	akkor az $(i,k+8)$-on is,
az $(i,k+3)$-on,	akkor az $(i,\ k+12)$-n is,

Eszerint a kapott szükséges föltételek közt ellentmondás van, a táblázat kívánt kitöltése lehetetlen.

Bagó Balázs (Győr, Révai M. Gimn., II. o. t.)

III. megoldás. A II. megoldás szemléletes elemeire támaszkodva vázolunk egy további módot arra, hogyan ütközhetünk ellentmondásba az elrendezés folyamán.

Bármely 1×12-es téglalapban ugyanaz a számjegykészlet lép föl, mint egy, az előírásban szereplő 4×3-as vagy 3×4-es ablakban. Ugyanis egy 1×12-es téglalap létrejön úgy, hogy egy 4×12-esből elhagyunk egy 3×12-est, márpedig a 4×12-est 4 db 4×3-as ablak–és a benne levő jegykészlet − teszi ki, a 3×12-est pedig 3 db 3×4-es, továbbá mert minden 1×12-es legalább az egyik hosszabb oldala mentén kiegészíthető 4×12-essé (4. ábra).



4. ábra

Ugyanaz a jegykészlete a 4. ábra alsó sávja három egyformán vonalkázott $l \times 3$-as téglalapjának is, a 2. ábráról mondottak alapján. Így mindegyikben egy db 0 áll-tehát az 1×12-es fehéren hagyott mezőire nem marad 0–, hiszen különben éppen a fehér mezőkön állna a jegykészlet három 0-ja, akkor pedig a 4 db 1-es nem lenne egyenlően elosztható a három db 1×3-asba (sem az 5 db 2-es).

Kimondhatjuk ugyanezeket három db olyan 1×12-es téglalapra is, amely az eddig tekintetből fölfelé vagy lefelé $1 - -1$ egységnyi eltolásokkal áll elő, és ezeknek is választhatjuk a vonalkázott 1×3-asokból eredő részeit. Ekkor pedig az egymás fölötti $4 - -4$ db 1×3-asból alakuló 4×3 -as ablakokban $4 - -4$ db 0 lenne, ellentétben a feladat követelményével.

Megjegyzés. Az 1×12-es téglalapról mondottak azt is jelentik, hogy minden sorban és oszlopban elő kellene fordulnia mindegyikféle számjegynek.