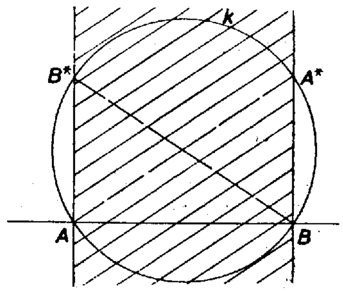
A sík azon pontjainak mértani helye, melyeket egy AB egyenesre merőlegesen vetítve, a vetület az AB szakasz belső pontja lesz, nyilvánvalóan a szakaszra az A-ban és B-ben állított merőleges egyenesek közti síksáv. A merőlegesek pontjai nem tartoznak hozzá a mértani helyhez (1. ábra).



1. ábra

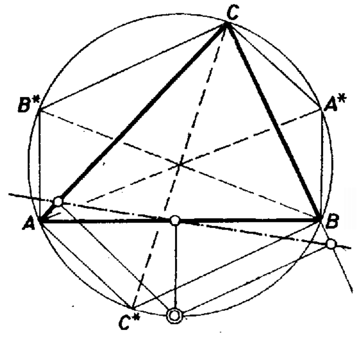
Legyen k egy, az A-n és B-n átmenő kör, és messe ezt a mondott síksáv A-n átmenő határa B*-ban, a B-n átmenő határa A^*-ban. Ekkor a k-ból a félkörnél kisebb AB^*, BA^* ívekre eső pontoknak – a végpontokat is hozzáértve – az AB egyenesen levő vetülete nem belső pontja az AB szakasznak. Thalész tétele alapján AA^* és BB^* a k-nak átmérői. A mondott ívek csak akkor zsugorodnak össze egy-egy pontra, ha AB a k-nak átmérője. (A továbbiakban – ha körívet mondunk – mindig a félkörnél nem hosszabb ívet értjük.)

Vegyük hozzá most A-hoz és B-hez k-nak C pontját, és legyen C^* a C-vel átellenes pont. Ekkor az előbbiekhez hasonlóan nem belső pont a vetülete az ABC háromszög

$$\begin{array}{ll} & AB \text{ oldalegyenesén az } AB^* \text{ és } BA^* \text{ ívek pontjainak,} \\ (1) & BC \text{ oldalegyenesén a } BC^* \text{ és } CB^* \text{ ívek pontjainak,} \\ & CA \text{ oldalegyenesén a } CA^* \text{ és } AC^* \text{ ívek pontjainak;} \end{array}$$

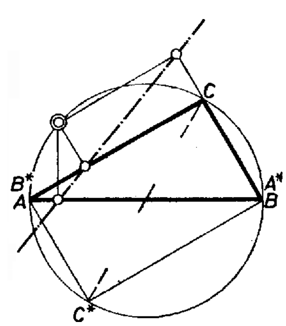
(az egyes egyenesek mellett *nem említett* ívek belső pontjaira nézve viszont a vetület belső pont lesz a megfelelő oldalszakaszon mint pl. AB-n az AB és A^*B^* ívek pontjaié.) Így már csak azt kell belátnunk, hogy az (1) alatti 6 ív együttvéve lefedi k-nak minden pontját, kizárja rájuk a 3 elemű tulajdonságnak legalább egy elemét.

Valóban, ha az ABC háromszög hegyesszögű, azaz C a félkörnél kisebb A^*B^* íven van, akkor az íveket határoló pontok sorrendje A, C^*, B, A^*, C, B^*, így k-nak minden pontja éppen egy (1) alatti ívhez, a 6 pont pedig két-két ívhez tartozik hozzá (2a. ábra);



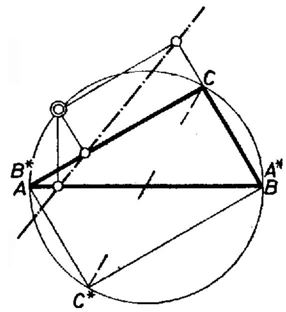
2a. ábra

ha van a háromszögben derékszög – válaszszuk C-t a csúcsául, – akkor B^* azonos A-val és A^* azonos B-vel, ekkor hasonlóan (1)-ből az utolsó négy ív fedi le k-t (2b. ábra);



2b. ábra

ha pedig van tompaszög – legyen $ACB\sphericalangle > 90°$, vagyis ha C az AB íven van –, akkor pontjaink egymásutánja A, B^*, C^*, A^*, B, C, tehát az A pont belső pontja a CB^* ívnek, továbbá B^*, A^*, B belső pontja rendre az AC^*-nak, a BC^*-nak, a CA^*-nak és az (1) ívek ekkor is lefedik k-nak minden pontját, sőt az AB^*, BA^* ívek pontjait háromszor is (2c. ábra). – Más eset nincs, ezzel bizonyításunkat befejeztük.



2c. ábra

Megjegyzések. 1. A kitűzött állítás bizonyítása mellett tulajdonképpen megkaptuk a háromszög síkjának azokat a pontjait, melyeknek a vetülete mindhárom oldalszakaszon belső pont; mondjuk is ki az eredményeket. Ezek a pontok a következő idomok *belső* pontjai: a 2a. ábrán az $AC^*BA^*CB^*$ konvex, centrálszimmetrikus hatszög, a 2b. ábrán az $ACBC^*$ téglalap, a 2c. ábrán a CDC^*E paralelogramma.

2. Többen bizonyításul a Simson-féle, más néven Wallace-féle egyenesek tételére[1] hivatkoztak. Ez a tétel azt mondja ki a háromszög körülírt körének pontjairól, hogy a szóban forgó 3 vetületük egy egyenesen van. Mivel pedig egy egyenesnek a háromszög kerületével legfeljebb két közös pontja lehet, azért az állítás helyes. Ez az érvelés helyes, legfeljebb az a szépséghibája, hogy magánál az állításnál jóval erősebb tételre hivatkozik, „nagy ágyút” használ.

[1]Lapunkban legutóbb a P. 108. problémában szerepelt, K. M. L. 46 (1973) 71–73. old.