1. Legyen a két különböző természetes szám a, ill. b. A feladat feltételei szerint

$$\frac{a+b}{2}=10p+q, \tag{1}$$

$$\sqrt{ab}=10q+p, \tag{2}$$

ahol p és q a két középérték számjegyei; ezért

$$0 \leqq q \leqq 9, \qquad 0 < p \leqq 9. \tag{3}$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből $a \neq b$ alapján

$$10p+q > 10q+p \qquad \text{és ebből} \qquad p > q.$$

(1)-ből, ill. (2)-ből

$$a+b=2(10p+q) \qquad \text{és} \qquad ab=(10q+p)^2,$$

eszerint a és b a következő másodfokú egyenletnek tesz eleget:

$$x^2-2(10p+q)x+(10q+p)^2=0. \tag{4}$$

Egész együtthatós másodfokú egyenletnek csak akkor lehet mindkét gyöke természetes szám, ha a

$$D=4\cdot 9\cdot 11(p+q)(p-q) \tag{5}$$

diszkriminánsa teljes négyzet, vagyis minden benne előforduló törzstényező páros kitevővel szerepel.

Tehát $p+q=11$, hiszen (3) miatt a $p-q$ nem lehet 11, másrészt $p+q \leqq 18 < 2\cdot 11$. Ebből az is következik, hogy p és q egyike páros, másika páratlan.

Most már $p-q$ csak egy 9-nél kisebb páratlan négyzetszám lehet, vagyis

$$p-q=1,$$

így pedig

$$p=6, \qquad q=5,$$

és a két szám $a=32$, $b=98$, sorrendjük a követelményekben lényegtelen.

Valóban, a két középérték

$$\frac{a+b}{2}=65 \qquad \text{és} \qquad \sqrt{ab}=56,$$

eleget tesz a feladat követelményeinek.

2. A 12-alapú számrendszerben (4) és (5) így alakulnak:

$$x^2-2(12p+q)x+(12q+p)^2=0,$$
$$D=2^2\cdot 11\cdot 13(p-q)(p+q),$$

ahol $1 \leqq p-q \leqq 11$, $1 \leqq p+q \leqq 21$, a $p+q=13$, $p-q=11$ föltételezés viszont $p=12$-re vezet, ami nem lehet számjegy ebben a rendszerben.

Megjegyzés. Az eredeti versenyfeladat ezt is tartalmazta: „Keresendő további olyan számrendszer, amelyben a (különben változatlan) probléma szintén megoldható.” Nos, ilyen a 9-es alapszámú rendszer ${}^{9)}118$ és ${}^{9)}20$ száma, (vagyis 98 és 18) számtani közepük ${}^{9)}64$, mértani közepük ${}^{9)}46$.