Mivel a kifejezés $x,\ y$-ban szimmetrikus, jelöljük x-szel a nagyobbik számot. Az x^2+xy+y^2 kifejezést átalakíthatjuk a következőképpen

$$x^2+xy+y^2=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

ahonnan az

$$u=\frac{x-y}{2} \quad \text{és} \quad v=\frac{x+y}{2} \tag{1}$$

számpár a feltételnek eleget tesz, ha x és y mindegyike páros vagy ha mindkettő páratlan.

Ha x és y közül az egyik páros, pl. y, de a másik páratlan, akkor az

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}\right)^2$$

azonos átalakításból megfelelő értékpár a következő:

$$u=x+\frac{y}{2} \quad \text{és} \quad v=\frac{y}{2}. \tag{2}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Többet bizonyítottunk be, mint amennyit a feladat kívánt: (1) és (2) mindegyikében u és v ***különbözők*** egymástól.

Továbbá (2) akkor is érvényes, ha x, y mindegyike páros, ekkor tehát $x^2+ +xy+y^2$ két különböző $u,\ v$ értékpárral is írható u^2+3v^2 alakban, ahol u és v különböző természetes számok. Pl. $28=4^2+4\cdot 2+2^2=1^2+3\cdot 3^2=5^2+3\cdot 1^2$.

2. Azt is látjuk, hogy az állítás megfordítható: ha u és v különböző természetes számok, akkor u^2+3v^2 írható x^2+xy+y^2 alakban, ahol x és y különböző természetes számok; meghatározásuk végett csupán (1)-et ill. (2)-t kell megoldanunk:

ha $u<v$, akkor (1)-ből $x=u+v$, $y=v-u$, ha pedig $u>v$, akkor (2)-ből $x=u-v$, $y=2v$.