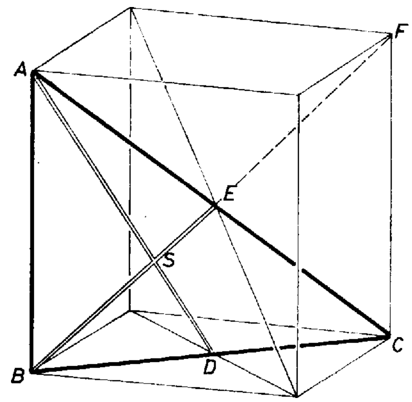
I. megoldás. Legyen a kocka AB oldaléle egységnyi. Az alapnégyzet BC átlója merőleges erre, és hossza $\sqrt{2}$, így az ABC derékszögű háromszög átfogója $AC=\sqrt{3}$ (1. ábra).



1. ábra

Azt mutatjuk meg, hogy az A-ból induló AD súlyvonal merőleges a B-ből induló BE súlyvonalra. Az ABD derékszögű háromszögben $BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, így $AD=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, és az S súlypont harmadoló tulajdonságánál fogva

$$AS=\frac{2}{3}\cdot AD=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Másrészt $BS=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{AC}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Így az ASB háromszögben $AS^2+BS^2=AB^2$ teljesül, vagyis a Pitagorasz-tétel megfordításából következik, hogy AS és BS merőlegesek egymásra.

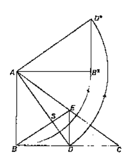
Mivel egy egyenesre egy adott pontjában (itt S-ben) csak egy merőleges állítható, ezért nem lehet, hogy (az S-en átmenő) harmadik súlyvonal is merőleges legyen akár AD-re, akár BE-re.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

II. megoldás. A fenti jelölésekkel az ED szakasz az ABC háromszög középvonala, ezért BED derékszögű háromszög és $DE=\dfrac{1}{2}$. Látjuk, hogy BD mértani középarányos AB és DE között:

$$AB:BD=BD:DE,$$

tehát az ABD és BDE háromszögek hasonlók. Mivel körüljárásuk is egyező, azért ABD-t (az ábrán a pozitív irányban) 90°-kal elfordítva, megfelelő befogóik párhuzamosak és egyirányúak lesznek, így az átfogók is, tehát AD és BE merőlegesek egymásra (2. ábra).



2. ábra

Megjegyzés. BE és AD merőleges állása kapcsolatos azzal, hogy ha a kocka BF testátlóját függőlegesre állítjuk, akkor az A, C csúcs $\dfrac{BF}{3}$, ill. $\dfrac{2BF}{3}$ magasságba jut, így D magassága is $\dfrac{BF}{3}$, vagyis AD vízszintes, merőleges BF-re. (Ez persze nem bizonyítás.)