A természetes számok közül a 4-nek az utódja a definíció b) része szerint 0, ez nem természetes szám, így további leszármazottja nincs, a 4-re tehát az állítás szó szerint nem igaz. Ez azonban feloldódik, ha így értelmezzük a feladatot: a leírt módon minden számból *el lehet jutni* – mégpedig egyértelműen, hiszen minden természetes szám egyet és csak egyet teljesít az a)–c) föltételek közül – a 4-hez, és a 4-ből „indulva" viszont már *helyben* is *vagyunk*. Ekkor pedig az állítás egyenértékű azzal, hogy a 0 is minden természetes számnak leszármazottja. Ezt bizonyítjuk annak megmutatásával, hogy minden N *szám*nak (tovább számon kizárólag *természetes szám*ot értünk) van nála kisebb, az a)–c) lépések véges számú alkalmazásával adódó leszármazottja. Így ugyanis véges számú lépéssel jutunk el N-ből a 0-hoz, hiszen az N-nél kisebb számok száma véges (és véges számú szám összege véges).

Állításunk nyilvánvaló, ha N utolsó számjegye 0 vagy 4-es, ekkor közvetlen leszármazottja, az utóda éppen 0,1 N, illetőleg kisebb is 0,1 N-nél, hiszen a 4 elhagyása két lépésben is gondolható: 0-t írunk a helyére – már ez is csökkentés – és ezt hagyjuk el.

N-nek minden más végződése esetén csak a c) lépésnek egyszeri vagy többszöri alkalmazása után kapunk 0-ra vagy 4-esre végződő leszármazottat, de a megduplázások száma – a 9-esre végződő N-ek kivételével – legföljebb 3, így a 9-es végződéstől eltekintve minden szám negyedik leszármazottja kisebb, mint $N \cdot 2^3/10 = 0{,}8\ N$, és ez megfelel állításunknak.

Valóban, ha N utolsó jegye 5-ös vagy 7-es vagy 2-es, akkor utóda 0-ra, illetve 4-esre végződik, tehát második leszármazottja nem nagyobb, mint 0,2 N. Minden más végződésből csak a 4-es végződést érhetjük el (az első csökkentésig): az 1-es és 6-os végződésből egy duplázással 2-es végű, 2 duplázással 4-es végű számot kapunk, és hasonlóan a 3-as és 8-as végűekből 3-szori, 2-vel való szorzással.

A hátralevő 9-esre végződő N-ből indulva, első ízben 4-szeri duplázás után (8-as, 6-os, 2-es végződésű leszármazott után) alkalmazhatjuk a csökkentő b) lépést, így az 5. leszármazottról, N_5-ről az eddigiek mintájára csak ezt mondhatjuk: kisebb, mint $N \cdot 2^4/10 = 1{,}6\ N$.

Mondhatunk azonban egy új megállapítást is: $N = 10k + 9$ esetén N_5 utolsó jegye páros. Ugyanis $N_4 = 2^4\ N$ osztható 16-tal és 4-esre végződik, így

$$N_5 = \frac{2^4 N - 4}{10} = \frac{2(4N-1)}{5},$$

egész szám, tehát páros.

Ha mármost N_5 végén 0, 4, 2 vagy 6 áll, akkor a fentiek szerint c)-nek legföljebb kétszeri alkalmazása után vagy a b) vagy az a) lépés végzendő, tehát legkésőbb a 3-mal későbbi, a 8. leszármazottig kapunk egy olyat, amely kisebb, mint $0{,}4 \cdot 1{,}6\ N = 0{,}64\ N$, és ez megfelel állításunknak.

Ha viszont N_5 végén 8-as áll, akkor az eddigieket ismételve a 4-gyel későbbi leszármazottra, N_9 re egyrészt $N_9 < 0{,}8\ N_5 < 0{,}8 \cdot 1{,}6\ N = 1{,}28\ N$, másrészt N_9 utolsó jegye páros.

Legutóbbi meggondolásunk legföljebb kétszeri megismétlésével most már célba érünk. Ha N_9 végén nem 8-as áll, akkor $N_{12} < 0{,}4\ N_9 < 0{,}512\ N$, ha pedig 8-as, akkor $N_{13} < 0{,}8\ N_9 < 1{,}024\ N$ és N_{13} utolsó jegye páros, így legkésőbb a 17. lépésig már olyat kapunk, mely kisebb $0{,}8 \cdot 1{,}024\ N$-nél, ami kisebb, mint N.

Összefoglalva: a 9-esre végződő számoknak legkésőbb a 17. leszármazottja kisebb náluk, minden más végződésű számnak pedig legkésőbb a 4. leszármazottja. Ezt akartuk bizonyítani, ebből az előrebocsátottak szerint következik a feladat állításának az a következménye, hogy minden természetes szám leszármazottainak sorozata 0-val végződik.

Megjegyzések. 1. A sorszámra talált 17-es felső korlát nem csökkenthető. Van ugyanis olyan szám, melynek az első, nála kisebb leszármazottja a 17. sorszámú, ilyen az $N = 6249$.

Könnyű utánaszámolni, hogy minden k természetes számra a $6250\ k - 1$ szintén ilyen tulajdonságú. $k = 25$ esetén a 4-nek a sorszáma a leszármazottak közt: 54.

2. Lényegében ugyanezek a tények voltak alapjai az NSZK 1973. évi matematikai versenye egyik feladatának: 4-ből kiindulva az a)–c) alakítások megfordításával minden természetes számhoz el lehet jutni.