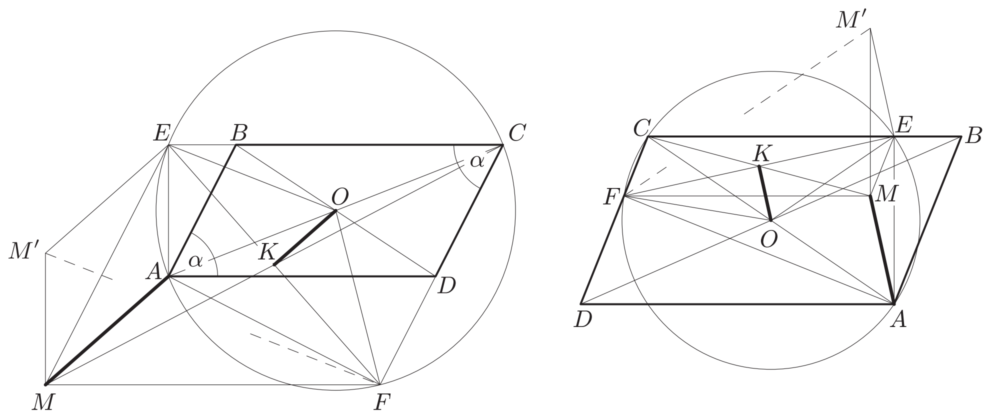
I. megoldás. Az AEF háromszög ME magasságvonala merőleges AF-re, tehát párhuzamos CD-vel. Ugyanígy $MF \parallel CB$, tehát az $MECF$ négyszög paralelogramma (az ábra két változatában BAD hegyesszög, illetve tompaszög).



Jelöljük az $MECF$ és $ABCD$ paralelogramma középpontját K-val, illetve O-val. K felezi MC-t, O felezi AC-t, így KO az ACM háromszög AM-mel pár-huzamos középvonala, tehát $AM = 2 \cdot KO$.

Szerkesztésüknél fogva E és F rajta vannak az AC mint átmérő fölötti (vagyis O középpontú) Thalész–körön, így $OE = OF = AC/2$, és mivel K az EF-et is felezi, azért KO az OEF egyenlő szárú háromszög magassága. Ebből

$$AM^2 = 4 \cdot KO^2 = 4\big(OE^2 - KE^2\big) = AC^2 - EF^2.$$

Eszerint a szakasz kiszámítható az AC és EF egyenesek közti szög felhasználása nélkül, amennyiben $AC \geqq EF$. Ha $EF > AC$, akkor nincs az adatoknak és a feladatnak eleget tevő paralelogramma.

Szecsői Sándor (Budapest, Berzenyi D. Gimn., II. o.t.)

II. megoldás. Toljuk el az AM szakaszt úgy, hogy A végpontja E-be jusson, és legyen ekkor M új helyzete M', így $M'E$ egyenlő MA-val és párhuzamos is vele. Mivel az MA magasság merőleges EF-re, azért az $M'EF$ háromszögben E-nél derékszög van:

$$MA^2 = M'E^2 = M'F^2 - EF^2. \tag{1}$$

Láttuk másrészt az I. megoldásban, hogy $MECF$ paralelogramma, így $MF = EC$. Szerkesztésünknél fogva MM' párhuzamos AE-vel, tehát merőleges MF-re. Ezek szerint az $MM'F$ derékszögű háromszög egybevágó az EAC háromszöggel (tükrös egybevágóság), ezért $M'F = AC$, és ezt (1)-be beírva

$$MA^2 = AC^2 - EF^2.$$

Schvarcz Tibor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladat kérdésének megválaszolásához nem volt szükség az AC, EF egyenesek közti, megadott φ szögre. A megjelölt forrásban ez nem is szerepelt, a szerkesztő bizottság kapcsolta a feladathoz avégett, hogy ezáltal mintegy közelebbről meghatározza a szóban forgó paralelogrammát, hiszen egy paralelogrammát 3 független adat határoz meg. Ajánljuk az olvasónak, végezze el a paralelogramma megszerkesztését φ és a két hosszúságadat felhasználásával.

2. Paralelogrammánk BAD szögét α-val jelölve $AE = AB \sin\alpha$, $AF = AD \sin\alpha$ és $FAE\sphericalangle = 180^\circ - \alpha = ABC\sphericalangle$ (merőleges szárú szögek), eszerint az AEF és BAC háromszögek hasonlók, így pedig $EF = AC \sin\alpha$. Innen is kiadódik, hogy a paralelogramma csak $EF \leqq AC$ esetében létezik.