a) Jelöljük a 200, a 100, az 50, a 20, a 10 filléres érméket, esetenként értéküket is, rendre K, S, $\ddot{O}$, H, T betűvel, ekkor egy-két egyszerű felváltás így írható: $500 = 2K + S = 5S = 10\ddot{O}$, egy a követelménynek megfelelő felváltás: $3S + 2\ddot{O} + 4H + 2T$. A felváltásokat a kémiai képletek mintájára még rövidebben fogjuk írni, az előbbieket pl. így: K_2S, S_5, $\ddot{O}_{10}$, $S_3\ddot{O}_2H_4T_2$. Nevezzük továbbá a cserébe adott pénzdarabok halmazának azt a részét, amely teljesíti a követelményt, *köteles rész*nek, a továbbít *szabad rész*nek; ekkor a legutóbbi példa négyféleképpen is bontható köteles és szabad részre:

$$S_3\ddot{O}_2H_4T_2 = (S\ddot{O}H)_2 + SH_2T_2 = (S\ddot{O}T)_2 + SH_4 = (SHT)_2 + S\ddot{O}_2H_2 = (\ddot{O}HT)_2 + S_3H_2.$$

b) A köteles rész 5-féleképpen állítható össze:

$$\text{I. } (KHT)_2, \quad \text{II. } (S\ddot{O}H)_2, \quad \text{III. } (S\ddot{O}T)_2, \quad \text{IV. } (SHT)_2, \quad \text{V. } (\ddot{O}HT)_2,$$

ugyanis K mellett sem S, sem $\ddot{O}$ nem léphet föl benne, a többi 4-féle érméből pedig egyet-egyet rendre kihagyva kapjuk a köteles rész hátra levő négy összeállítási módját. A megfelelő szabad részek értéke fillérben rendre:

I. 40, II. 160, III. 180, IV. 240, V. 340,

és az eseteken végigmenve azt fogjuk meghatározni, hogy ezeket rendre hány különböző módon lehet összeállítani. E számokat összeadva a megfelelő felváltások keresett számánál többet kapunk, mert – mint fent láttuk – vannak a $(S\ddot{O}HT)_2$ részt tartalmazó felváltások is –, de más 4 féle váltópénzből már nem adhatunk 2 – 2 db-ot az 5 Ft-osért. A mondott összegben az ilyen felváltásokat az utolsó 4 mód mindegyikénél beszámítjuk. Ezért a $(S\ddot{O}HT)_2$ részt tartalmazó felváltások számának 3-szorosát majd vissza kell vennünk az összegből.

K-érmét csak a IV. és V. szabad rész előállításában használhatunk, de csak 1-et–1-et. Látni fogjuk, hogy célszerű lesz ezeket az eseteket eszerint kettéválasztani, legyen IV. és V. az, amiben nem szerepel K, ha pedig K-t is használunk, akkor a

$$\text{VI. } K(SHT)_2, \qquad \text{VII. } K(\ddot{O}HT)_2$$

részen felül előállítandó (szabad) rész értéke fillérben

VI. 40, VII. 140.

A legutóbbi szám (a 140) előállítási módjainak száma hasonlóan egyszersmind a $(S\ddot{O}HT)_2$ részt tartalmazó felváltások számát is megadja. Jelöljük f_n-nel $10n$ fillér olyan kifizetéseinek számát (n természetes szám vagy 0), mely csak S, $\ddot{O}$, H, T érmekből áll, ekkor az eddigiek szerint feladatunk kérdésére a választ a következő szám adja meg:

$$\begin{aligned} f &= (f_4 + f_{16} + f_{18} + f_{24} + f_{34} + f_4 + f_{14}) - 3f_{14} = \\ &= 2f_4 - 2f_{14} + f_{16} + f_{18} + f_{24} + f_{34}. \end{aligned} \tag{1}$$

Itt $f_4 = 3$, mert csak H és T jön szóba, és H-ből 2-t, vagy 1-et vehetünk vagy egyet sem. Érdemes lesz e meggondolásunk eredményét általánosabban kimondani: csak H és T darabokban $10m$ fillért (ahol m nem-negatív egész)

$$g_m = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$$

-féleképpen fizethetünk ki, ahol a szögletes zárójel azt jelenti, hogy a benne álló szám egész részét kell vennünk, pl. $10m = 90$ esetében $g_9 = \left[\frac{9}{2}\right] + 1 = 5$, aszerint, hogy H-ból 4, 3, 2, 1, 0 darabot adunk. Más szóval g_m a

$$2x + y = m \tag{2}$$

egyenlet megoldásainak száma nem-negatív egész számokban, x a H, y a T darabok száma.

Ebben az alakban a további f_n értékek meghatározása során is felhasználhatjuk eredményünket, amikor már $\ddot{O}$ és S darabok is szóba jönnek, annak alapján, hogy az $S : \ddot{O}$ értékarány ugyanúgy 2, mint a $H : T$ arány. Ezt f_{34} esetében mutatjuk be, a további f_n értékek esete hasonló, csak rövidebb a számítás. Bontsuk 340-et egy 50-nel osztható részre és maradékra:

$$340 = 300 + 40 = 250 + 90 = \ldots = 50 + 290 = 0 + 340, \text{ általában}$$
$$340 = 50m' + 10m, \qquad \frac{310}{10} = 5m' + m,$$

ahol m' és m nem negatív egészek, és írjuk elő, hogy az 50-nel osztható részt csak S és $\ddot{O}$ érmékkel fizethetjük. Ekkor ennek a résznek a kifizetéseit ismét (2) megoldásai adják, ha x az S, y pedig az $\ddot{O}$ darabok száma. Végigmenve az

$$\begin{array}{rccccccc} m' = & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \\ m = & 4, & 9, & 14, & 19, & 24, & 29, & 34 \end{array}$$

értékpárokon, sorra vesszük 340 fillér minden kívánt (vagyis K nélküli) kifizetését és mindegyiket csak egyszer. És mivel az 50-nel osztható rész minden ilyen kifizetését össze kell kapcsolnunk a további rész minden lehető kifizetésével, azért

$$\begin{aligned} f_{34} &= g_6g_4 + g_5g_9 + g_4g_{14} + g_3g_{19} + g_2g_{24} + g_1g_{29} + g_0g_{34} = \\ &= 4\cdot 3 + 3\cdot 5 + 3\cdot 8 + 2\cdot 10 + 2\cdot 13 + 1\cdot 15 + 1\cdot 18 = 130. \end{aligned}$$

Hasonlóan $f_{14} = 19, f_{16} = 25, f_{18} = 31, f_{24} = 58$, és mindezekkel (1) alapján

$$f = 212.$$

Ennyi különböző módon váltható fel egy 5 Ft-os érme a megengedett érmékre, a kiegészítő követelmény megtartása mellett.

Perge Lóránt (Eger, Gárdonyi G. Gimn. II. o. t.)
dolgozata alapján, további egyszerűsítésekkel