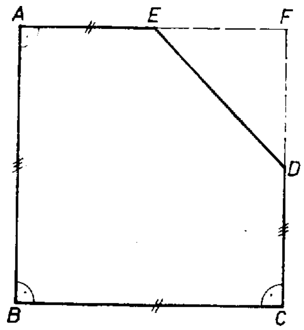
A vizsgálandó $ABCDE$ ötszög 90°-os szögei közül kettőnek a csúcsa mindenesetre szomszédos, jelöljük ezeket A-val és B-vel, éspedig úgy, hogy A másik szomszédja, E, az egyik 135°-os szög csúcsa legyen. Ekkor feladatunk a további két szög- és az oldalmértékszámok szerepének megállapítása. A harmadik derékszög csúcsa vagy C, vagy D. Mindenesetre a BC és AE oldalegyenesek párhuzamosak, mert mindkettő merőleges AB-re, és a konvexség alapján D köztük van.

I. Ha $BCD\sphericalangle = 90^\circ$, tehát $CDE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 135^\circ$, akkor még $AB \parallel CD$, és E köztük van (1. ábra).



1. ábra

Az AE, CD egyenesek metszéspontját F-fel jelölve D a CF szakaszon, E pedig az AF szakaszon van, tehát

$$AE < AF = BC, \quad CD < CF = AB, \tag{1}$$

hiszen $ABCF$ téglalap. Továbbá DEF egyenlő szárú derékszögű háromszög, mert D-nél és E-nél levő külső szögei egyenlők, ezért

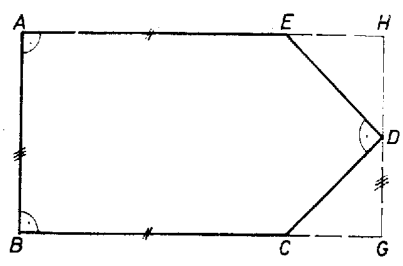
$$BC - AE = AF - AE = EF = FD = AB - CD, \tag{2}$$

vagyis ötszögünk négy oldalából alakított két oldalpár különbsége egyenlő.

Nem szerepelhet e négy oldal mértékszámai közt a $\sqrt{2}$, az adatok közti egyetlen irracionális mértékszám, különben a (2) egyenlőség egyik oldalán irracionális szám állna, a másikon racionális szám, ami lehetetlen. Így $\sqrt{2}$ csak az (1)-ben nem szereplő DE oldal hossza lehet, vagyis a DEF háromszög átfogójáé. Ezért $EF = DF = 1$, ennélfogva (1)-re tekintettel $BC = BA = 2$ és $AE = CD = 1$.

A méretek szerepének ezen elosztása nyilvánvalóan megoldását adja a feladatnak, az ötszög egy 2 egységnyi oldalú négyzetből áll elő, egyik sarkának a mondott méretek szerinti levágásával.

II. Ha pedig $CDE\sphericalangle = 90^\circ$, és így $BCD\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 135^\circ$, akkor húzzunk párhuzamost D-n át AB-vel, és messe ez a BC egyenest G-ben, az AE egyenest H-ban (2. ábra).



2. ábra

Így a DCG háromszögben G-nél derékszög van, ezért C-nél levő szöge nem lehet 135°, tehát C a BG szakaszon van; és $DCG\sphericalangle = 45^\circ$, $DG = CG$; ugyanígy E az AH szakaszon van és $DH = EH$. Ezek szerint CDG, EDH egyenlő szárú derékszögű háromszögek, és

$$AB = GH = GD + DH = \frac{CD}{\sqrt{2}} + \frac{DE}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Itt sem CD, sem ED hossza nem lehet $\sqrt{2}$. Különben ugyanis a jobb oldal egyik tagja 1, azaz racionális szám lenne, a másik tag irracionális, és a bal oldal hossza is csak racionális számok közül volna választható. Eszerint a (3)-ból átszorzással adódó

$$\sqrt{2} \cdot AB = CD + DE$$

egyenlőség jobb oldala egész, az egyenlőség csak $AB = \sqrt{2}$ mellett teljesülhet, tehát $CD + DE = 2$, ez pedig a további 4 szakaszból csak úgy állítható elő, ha mindkét tagja 1; végül $BC = AE = 2$.

Ezt a megoldást is egyértelműen kaptuk, más megoldása nincs a feladatnak.

Megjegyzések. 1. A fentiekben azt használtuk fel, hogy egy racionális és egy irracionális szám összege nem lehet racionális szám.

2. Ötszögünk konvex voltát tulajdonképpen már a szögek adott értéke biztosította, de felhasználtuk, hogy egy konvex sokszög bármelyik oldalegyeneséhez képest az egyik parton helyezkedik el. Meg lehet mutatni, hogy ez az értelmezés egyenértékű a tankönyv[1] fogalomalkotásával.

[1] *Horvay K.–Pálmay L.* Matematika a gimn. I. o. számára. Tankönyvkiadó Budapest, 1966. 199. old.